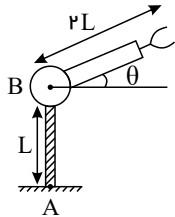




مفاهیم مقدماتی مثلثات

۱ در شکل زیر، بازوی حرکت روبات به گونه‌ای قرار گرفته است که فاصله نوک گیره تا سطح زمین، نصف حداکثر مقدار ممکن است. فاصله تصویر نوک گیره بر روی زمین تا نقطه A ، چند برابر L است؟ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

قلم چی - ۱۳۹۸



۳ $\frac{\sqrt{6}}{4}$

۴ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

۳ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

۲ دو ناظر A و B که در سطح زمین قرار دارند و با فاصله ۲۰ متر از هم در یک طرف برجی ایستاده‌اند، نوک این برج را با زاویه‌های 30° و 45° نسبت به افق می‌بینند. ارتفاع این برج چند متر است؟ (A, B) و پای برج روی یک خط قرار دارند.

قلم چی - ۱۳۹۸

۴ $20(\sqrt{3}-1)$

۳ $20(\sqrt{3}+1)$

۲ $10(\sqrt{3}-1)$

۱ $10(\sqrt{3}+1)$

۳ شخصی با قد ۱٫۸۰ متر از روی پشت‌بام ساختمانی به ارتفاع ۷۵ متر بالگردی را که از روبه‌رو به آن شخص در حال نزدیک شدن است می‌بیند. اگر زاویه دید شخص نسبت به سطح افق 30° درجه و فاصله بالگرد تا شخص در راستای زاویه دید شخص در حدود 440.4 متر باشد، بالگرد در چند متری از سطح زمین قرار دارد؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۴ ۲۲۲

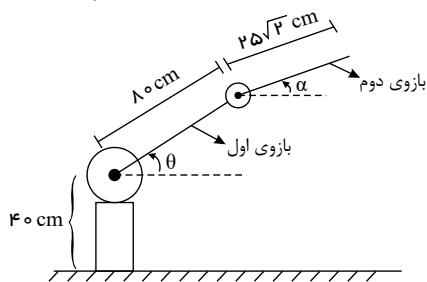
۳ ۲۹۷

۲ ۲۹۵٫۲

۱ ۲۹۶٫۸

۴ شکل زیر یک ربات است که از دو بازوی متصل به هم برای برداشتن اجسام استفاده می‌کند. این ربات برای برداشتن یک شیء، بازوی دوم خود را در حالت زاویه $\alpha = -45^\circ$ نسبت به افق قرار داده است. اگر بازوی اول در وضعیت افقی قرار گیرد، ارتفاع جسم از سطح زمین برحسب سانتی‌متر کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۸



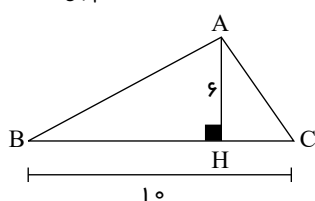
۱ ۲۰

۲ ۱۵

۳ ۳۵

۴ ۱۰

قلم چی - ۱۳۹۹



۵ در شکل زیر اگر $3 \tan \hat{B} = 2 \tan \hat{C}$ باشد، آن‌گاه طول ضلع AB کدام است؟

۲ $5\sqrt{2}$

۴ $4\sqrt{2}$

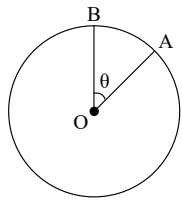
۱ $6\sqrt{2}$

۳ $7\sqrt{2}$



۶ مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع 5 ، طول کمان AB برابر $\frac{\pi}{3}$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی θ بر حسب درجه کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۷



۲۰° (۲)

۱۰° (۱)

۳۶° (۴)

۱۸° (۳)

قلم چی - ۱۳۹۷

۷ اگر $\sin x > 0$ و $\cot x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

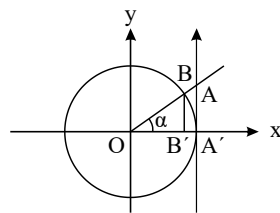
چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

قلم چی - ۱۳۹۸



۸ با توجه به دایره‌ی مثلثاتی زیر، اگر $AA' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، مقدار OB' کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۲)

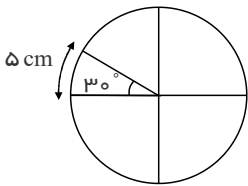
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

قلم چی - ۱۳۹۸

۹ مساحت دایره‌ی مقابل کدام است؟



$\frac{800}{\pi}$ (۲)

$\frac{900}{\pi}$ (۱)

$\frac{620}{\pi}$ (۴)

$\frac{700}{\pi}$ (۳)

۱۰ در یک ساعت عقربه‌ای، نوک عقربه‌ی دقیقه‌شمار در مدت زمان ۴۰ دقیقه، مسافت ۶۰ سانتی‌متر را طی کرده است. طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار چند

سانتی‌متر است؟

45π (۴)

$\frac{45}{\pi}$ (۳)

15π (۲)

$\frac{15}{\pi}$ (۱)

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۱ انتهای کمان‌های ۳ و $\frac{4}{5}$ رادیان به ترتیب در کدام نواحی قرار دارند؟

سوم - چهارم (۴)

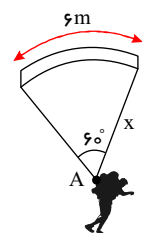
سوم - سوم (۳)

دوم - سوم (۲)

دوم - دوم (۱)

۱۲ مطابق شکل، یک چتر نجات به حالت دایره‌ای در هنگام پرواز به اندازه ۶۰ درجه باز شده است. مقدار x چند متر است؟ (نقطه A را مرکز دایره

فرض کنید).



18π (۲)

$\frac{\pi}{10}$ (۱)

$\frac{18}{\pi}$ (۴)

10π (۳)

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳ در یک مثلث قائم‌الزاویه، اختلاف دو زاویه حاده برابر با 18° است. کوچک‌ترین زاویه مثلث چند رادیان است؟

$\frac{2\pi}{5}$ (۴)

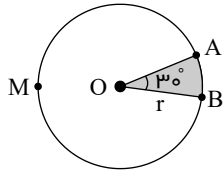
$\frac{3\pi}{10}$ (۳)

$\frac{\pi}{5}$ (۲)

$\frac{\pi}{10}$ (۱)



قلم چی- ۱۳۹۸



۱۴ در شکل مقابل، محیط ناحیه هاشورخورده $12 + \pi$ است. در این صورت طول کمان $\widehat{AMB}$ کدام است؟

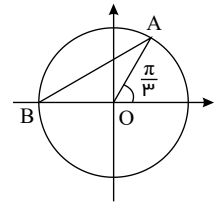
۸π (۲)

۹π (۱)

۱۱π (۴)

۶π (۳)

قلم چی- ۱۳۹۸



۱۵ اگر A نقطه متناظر با زاویه $\frac{\pi}{3}$ روی دایره مثلثاتی باشد، نسبت طول کمان AB به طول پاره خط AB کدام است؟

$2\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ (۴)

$2\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ (۳)

قلم چی- ۱۳۹۸

۱۶ اگر $\frac{3\pi}{8} < \alpha \leq \frac{5\pi}{8}$ و $\tan 2\alpha = \frac{-m+1}{2}$ باشد، حدود m کدام است؟

$[-1, 3]$ (۴)

$[-3, 1]$ (۳)

$(-1, 3]$ (۲)

$(-3, 1]$ (۱)

قلم چی- ۱۳۹۸

۱۷ کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$\sin(-4) < \cos(-2)$ (۴)

$\sin 3 < \cos(-1)$ (۳)

$\cos 2 > \sin 1$ (۲)

$\sin 4 > \cos(-1)$ (۱)

قلم چی- ۱۳۹۷

۱۸ اگر $\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

دوم و سوم (۴)

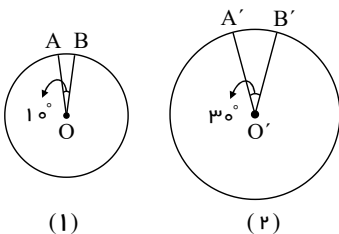
اول و چهارم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

قلم چی- ۱۳۹۸

۱۹ مطابق شکل، اگر مساحت دایره (۲) سه برابر مساحت دایره (۱) باشد، حاصل $\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}$ کدام است؟



$\sqrt{3}$ (۱)

$3\sqrt{3}$ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

قلم چی- ۱۳۹۸

۲۰ اگر $20^\circ < \theta < 50^\circ$ باشد و $\sin 3\theta = \frac{m-1}{2}$ ، حدود m کدام است؟

$[2, 3]$ (۴)

$(2, 3]$ (۳)

$[2, 3)$ (۲)

$(2, 3)$ (۱)

۲۱ طول کمانی که یک نقطه روی یک چرخ دوار به شعاع $\frac{1}{\pi}$ متر در هر ساعت طی می‌کند برابر با $2\frac{5}{8}$ متر است. اگر این نقطه نسبت به مرکز چرخ به اندازه ۹۰۰ درجه دوران کرده و سپس از کار بایستد، این چرخ جمعاً چند ساعت چرخیده است؟

قلم چی- ۱۳۹۸



۲ (۲)

۱ (۱)

۵ (۴)

۳ (۳)

۲۲ نقطه A روی محیط بیرونی چرخ کامیونی که با سرعت ثابت $\frac{1}{h} km$ در حال حرکت است، قرار دارد. این نقطه پس از گذشت ۱ دقیقه n دور به‌علاوه $\frac{2}{3}$ دور کامل را طی می‌کند. n کدام است؟ (شعاع چرخ ۱ متر است و $\pi \simeq 3$)

قلم چی- ۱۳۹۸

۱۶۶ (۴)

۱۹۰ (۳)

۱۳۳ (۲)

۱۶۷ (۱)



۲۳) اگر $\alpha = \beta - \gamma$ ، $\beta = 60^\circ$ و $\gamma = -3\pi$ رادیان باشند، آنگاه انتهای کمان زاویه α در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد؟ قلم چی - ۱۳۹۸

- اول ۱) دوم ۲) سوم ۳) چهارم ۴)

۲۴) طول کمان زاویه مرکزی $\frac{\pi}{3}$ رادیان در دایره C با طول کمان زاویه مرکزی $\frac{\pi}{12}$ رادیان در دایره C' برابر است. نسبت مساحت دایره C به مساحت دایره C' کدام است؟ قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) ۱۶

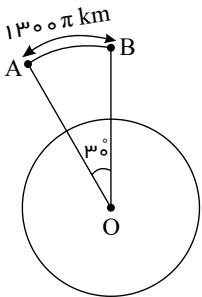
۲۵) در مدت ۴۸ دقیقه، عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار، در مجموع چند رادیان طی می‌کنند؟ قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $\frac{8\pi}{5}$ ۲) $\frac{9\pi}{5}$ ۳) $\frac{26\pi}{15}$ ۴) $\frac{28\pi}{15}$

۲۶) اگر اندازه یک زاویه برحسب رادیان ۳ برابر شود به اندازه آن زاویه برحسب درجه، 60° اضافه می‌شود. اندازه زاویه اولیه برحسب رادیان کدام است؟ قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۲۷) ماهواره ای در یک مدار دایره‌ای به دور زمین در حال حرکت است. اگر این ماهواره مسافتی معادل 1300π کیلومتر را طی کند، با توجه به شکل، ماهواره در چه فاصله‌ای از سطح زمین برحسب کیلومتر در حال حرکت است؟ (شعاع زمین 6400 کیلومتر است). قلم چی - ۱۳۹۸



- ۱) ۱۴۰۰ ۲) $\frac{1300\pi}{3}$ ۳) ۷۸۰۰ ۴) $\frac{149\pi}{3}$

۲۸) چرخ و فلکی ۴۰ کابین دارد و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. اگر شخصی در ابتدا در کابین شماره ۵ باشد، پس از دوران به اندازه $\frac{43\pi}{10}$ رادیان، نسبت به حالت اولیه در موقعیت کدام کابین قرار می‌گیرد؟ (فاصله بین کابین‌ها یکسان است و شماره‌بندی آن‌ها به ترتیب و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد). قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۲۹) در مدت زمانی معین، نوک عقربه دقیقه‌شمار یک ساعت عقربه‌ای با طول ۸ سانتی‌متر، 16π سانتی‌متر مسافت را طی می‌کند. در این مدت زمان، نوک عقربه ساعت‌شمار با طول ۶ سانتی‌متر، چه مسافتی را برحسب سانتی‌متر طی می‌کند؟ قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) π ۲) 4π ۳) 6π ۴) 12π

۳۰) کدام یک از مقادیر زیر نسبت به سایر گزینه‌ها، کوچک‌تر است؟ (زوایا برحسب رادیان هستند). قلم چی - ۱۳۹۹

- ۱) $\cos 1$ ۲) $\cos 2$ ۳) $\cos 6$ ۴) $\cos 8$

۳۱) اگر α در محدوده 30° تا 120° تغییر کند، $\sin \alpha$ در بازه $[a, b]$ قرار می‌گیرد. مقدار $b - a$ کدام است؟ قلم چی - ۱۳۹۹

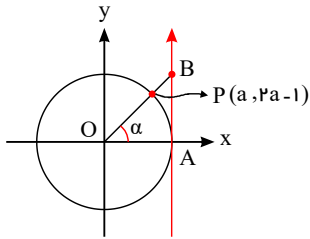
- ۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

۳۲) اندازه زاویه‌ای که عقربه دقیقه‌شمار بین دو زمان خاص طی می‌کند، $\frac{3\pi}{11}$ رادیان است. اندازه زاویه‌ای که عقربه ساعت‌شمار در این مدت طی می‌کند، چند رادیان است؟ قلم چی - ۱۳۹۹

- ۱) $\frac{3\pi}{44}$ ۲) $\frac{\pi}{44}$ ۳) $\frac{\pi}{22}$ ۴) $\frac{3\pi}{22}$



قلم چی - ۱۳۹۸



۳۳ با توجه به دایره مثلثاتی زیر، مساحت مثلث AOB چقدر است؟ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

- (۲) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{1}{2}$

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{3}{8}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۳۴ حاصل عبارت $A = 2[\sin 8 - \sin 9] + [\cos 10]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

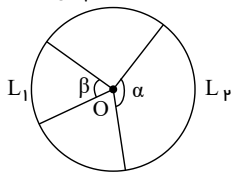
- (۴) -۳

- (۳) ۳

- (۲) -۱

- (۱) ۱

قلم چی - ۱۳۹۸



۳۵ است؟ (O مرکز دایره است.)

- (۲) قائم الزاویه

- (۱) متساوی الساقین

- (۴) هیچ کدام

- (۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین

اتحادهای مثلثاتی

خارج از کشور - ۱۳۹۸

۳۶ اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ کدام است؟

- (۴) $\cos x$

- (۳) $\cos^2 x$

- (۲) $-\cos x$

- (۱) $-\cos^2 x$

سراسری - ۱۳۹۸

۳۷ اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right)$ کدام است؟

- (۴) $-\cos x$

- (۳) $-\sin x$

- (۲) $\cos x$

- (۱) $\sin x$

قلم چی - ۱۳۹۸

۳۸ اگر $7x = \frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\frac{\cos x \sin 2x \tan 3x}{\cot 4x \cos 5x \sin 6x}$ کدام است؟

- (۴) $3\sqrt{2}$

- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

- (۲) صفر

- (۱) ۱

قلم چی - ۱۳۹۸

۳۹ اگر $3 = 2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x$ باشد، آن گاه مجموع مقادیر ممکن برای $\tan x$ کدام است؟

- (۴) ۳

- (۳) ۱

- (۲) -۳

- (۱) -۱

قلم چی - ۱۳۹۹

۴۰ اگر $\tan x < 1$ باشد و $\tan x + \cot x = \frac{5}{2}$ ، آن گاه مقدار مثبت $\sin x$ کدام است؟

- (۴) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

- (۳) $\frac{2}{3}$

- (۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۴۱ اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ باشد، عبارت $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\sin \beta}$ با کدام گزینه زیر برابر است؟

- (۴) $-\tan \alpha$

- (۳) $\tan \alpha$

- (۲) -۱

- (۱) ۱



سراسری - ۱۳۹۸

۴۲) حاصل عبارت $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$ کدام است؟

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$

خارج از کشور - ۱۳۹۸

۴۳) حاصل عبارت $\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3}$ کدام است؟

- ① -1 ② صفر ③ 1 ④ $\sqrt{3}$

قلم چی - ۱۳۹۷

۴۴) اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

- ① 5 ② 1 ③ -3 ④ -4

قلم چی - ۱۳۹۸

۴۵) به ازای کدام مقدار x تساوی $\cos(3x + \frac{\pi}{12}) + \cos(\frac{\pi}{6} - x) = 0$ برقرار است؟

- ① $\frac{3\pi}{8}$ ② $\frac{3\pi}{16}$ ③ $\frac{\pi}{8}$ ④ $\frac{\pi}{16}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۴۶) حاصل عبارت $\frac{\sin(75^\circ) + \cos(-42^\circ)}{2 \tan(-315^\circ)}$ با مقدار کدام گزینه برابر است؟

- ① $\cos(210^\circ)$ ② $\sin(210^\circ)$ ③ $\cos(270^\circ)$ ④ $\sin(150^\circ)$

قلم چی - ۱۳۹۸

۴۷) اگر $\sin\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، حاصل عبارت $A = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ کدام است؟

- ① 1 ② $\frac{2}{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{3}$

خارج از کشور - ۱۳۹۸

۴۸) اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

- ① $-1,23$ ② $-0,52$ ③ $0,27$ ④ $0,48$

قلم چی - ۱۳۹۸

۴۹) اگر $\tan 18^\circ = \alpha$ باشد و داشته باشیم: $\frac{A \sin 108^\circ + \cos 72^\circ}{A \sin 918^\circ} = \frac{2}{3}$ ، در این صورت مقدار A کدام است؟

- ① $\frac{-3\alpha}{3 + 2\alpha}$ ② $\frac{3\alpha}{3 - 2\alpha}$ ③ $\frac{2\alpha}{3 - 2\alpha}$ ④ $\frac{2\alpha}{2 - 3\alpha}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۵۰) هرگاه $\cos(x + 30^\circ) + \cos(2x + 60^\circ) = 0$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$ کدام است؟ (x در ربع اول قرار دارد).

- ① $\sqrt{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

سراسری - ۱۳۹۸

۵۱) حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۵۲) مقدار عبارت $\frac{2 \sin 200^\circ + \cos 290^\circ}{\sin 160^\circ + 2 \cos 70^\circ}$ کدام است؟

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ -3 ④ 1



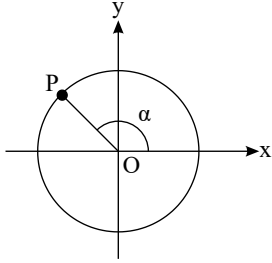
قلم چی - ۱۳۹۸

۵۳ اگر $\cos \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان θ در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\tan(\frac{3\pi}{4} - \theta)$ کدام است؟

- ① -۳ ② $\frac{1}{3}$ ③ ۳ ④ $-\frac{1}{3}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۵۴ با توجه به شکل زیر اگر $P(-\frac{1}{3}, y)$ و طول OP برابر یک واحد باشد، حاصل $A = 3 \sin(\pi + \alpha) + 2 \tan^2 \alpha$ کدام است؟



- ① $16 + 2\sqrt{2}$
② $16 - 2\sqrt{2}$
③ $8 + 3\sqrt{2}$
④ $8 - 3\sqrt{2}$

۵۵ نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی را نسبت به مبدأ قرینه می‌کنیم تا نقطه P' به دست آید. در این صورت کدام نسبت مثلثاتی مربوط به نقاط P و P' باهم برابر است؟ ($x, y \neq 0$)

قلم چی - ۱۳۹۸

- ① سینوس ② کسینوس ③ تانژانت ④ هیچ کدام

قلم چی - ۱۳۹۸

۵۶ اگر $\sin(\pi + x) = \frac{1}{2} + \sin(\pi - x)$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد، حاصل $\cot(\frac{\pi}{2} + x)$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{\sqrt{15}}$ ② $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ $-\sqrt{15}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۵۷ حاصل عبارت $A = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \dots + \tan 180^\circ$ کدام است؟

- ① صفر ② $\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} + 1$ ③ -۱ ④ ۱

قلم چی - ۱۳۹۸

۵۸ مقدار $\sin 451^\circ$ با کدام گزینه زیر برابر نیست؟

- ① $\cos 1^\circ$ ② $-\sin 269^\circ$ ③ $\sin 631^\circ$ ④ $\cos(-\frac{\pi}{180})$

قلم چی - ۱۳۹۸

۵۹ با توجه به تساوی $\frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) - 2 \sin(\alpha - 3\pi)}{3 \sin(\alpha - \frac{3\pi}{4})} = 2$ ، مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟

- ① ۲ ② $\frac{1}{2}$ ③ ۳ ④ $\frac{1}{3}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۶۰ اگر $\cot 80^\circ = \frac{1}{2}$ ، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 260^\circ - \cos 550^\circ}{\sin 80^\circ + \sin 730^\circ}$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ ۱ ④ $\frac{1}{2}$

۶۱ اگر $2 \cos(\pi - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) < 0$ و $\tan(\frac{\pi}{2} - x) - \tan(\frac{\pi}{2} + x) > 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

قلم چی - ۱۳۹۸

- ① اول ② دوم ③ سوم ④ چهارم

قلم چی - ۱۳۹۸

۶۲ حاصل عبارت $\sin(-\frac{7\pi}{6}) + 2 \tan(\frac{25\pi}{4}) - 3 \cos(\frac{124\pi}{3})$ کدام است؟

- ① ۱ ② صفر ③ ۴ ④ ۳

قلم چی - ۱۳۹۹

۶۳ اگر $x = \sin 35^\circ$ باشد، آن گاه حاصل $\frac{\sin 215^\circ + \cos 125^\circ}{\tan 325^\circ - \cot 235^\circ}$ کدام است؟

- ① $x\sqrt{1-x^2}$ ② $\sqrt{1-x^2}$ ③ $x\sqrt{1+x^2}$ ④ $\sqrt{1+x^2}$



قلم چی - ۱۳۹۸

۶۴) برای $-\frac{\pi}{18} < \frac{x-\pi}{3} < \frac{\pi}{24}$ داریم: $\cos 2x = 2m - 1$. در این صورت حدود m کدام است؟

- ۱) $(\frac{3}{4}, 1]$ ۲) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ۳) $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{2}+2}{4}]$ ۴) $(0, 1]$

قلم چی - ۱۳۹۸

۶۵) اگر $\cos(\frac{7\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

- ۱) $\frac{23}{54}$ ۲) $-\frac{23}{54}$ ۳) $\frac{23}{27}$ ۴) $-\frac{23}{27}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۶۶) اگر $\log(\sin \frac{4\pi}{5}) - \log(\cos 324^\circ) + \log A = 0$ باشد، A کدام می تواند باشد؟

- ۱) $\tan 36^\circ$ ۲) $\tan 54^\circ$ ۳) $\cot 18^\circ$ ۴) $\cot 72^\circ$

قلم چی - ۱۳۹۸

۶۷) اگر انتهای زاویه α در ربع اول دایره مثلثاتی و $2 = \frac{\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) + 2\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 3\cos(2\pi + \alpha)}$ باشد، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{17}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt{65}}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{13}}$

۶۸) تابع $f(x) = a + b \cos x$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ دارای بیش ترین مقدار $\frac{3}{2}$ و دارای کم ترین مقدار $\frac{1}{2}$ است. در این صورت $f(\frac{5\pi}{3})$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۸

($b > 0$)

- ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۶۹) اگر $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\pi - \theta) + 2\cos(\pi + \theta)}{2\sin(2\pi - \theta) + \cos(2\pi + \theta)}$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{4}{5}$ ۴) تعریف نشده

قلم چی - ۱۳۹۸

۷۰) اگر $\frac{\tan x - \cot x}{\cos 2x} = 5$ باشد، آنگاه حاصل $\cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{2}{5}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۷۱) اگر $\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2}$ باشد، آن گاه حاصل $\sin 2\alpha$ برابر با کدام گزینه است؟

- ۱) $\frac{12}{13}$ ۲) $-\frac{12}{13}$ ۳) $\frac{5}{13}$ ۴) $-\frac{5}{13}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۷۲) حاصل عبارت $\frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۷۳) اگر $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$ کدام است؟

- ۱) ۲۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

قلم چی - ۱۳۹۷

۷۴) اگر $\cos^4 x = 1 + \sin^4 x$ ، آنگاه حاصل $\cos x$ کدام می تواند باشد؟

- ۱) صفر ۲) -۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$



قلم چی - ۱۳۹۷

۷۵ اگر $\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sin x + 6 \cos x} = 1$ مقدار $\cot 2x$ کدام است؟

- ① $-\frac{24}{5}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $-\frac{5}{12}$ ④ $-\frac{12}{5}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۷۶ اگر $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4}$ باشد، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- ① $-\frac{3}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{7}{8}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۷۷ اگر $m = 1 + \sin 22^\circ$ باشد، $\sin^2 25^\circ$ کدام است؟

- ① m ② $\frac{m}{2}$ ③ $2m$ ④ $1 - m$

قلم چی - ۱۳۹۸

۷۸ حاصل $\sin 15^\circ \times \cos 75^\circ - \frac{1}{2}$ کدام است؟

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

قلم چی - ۱۳۹۷

۷۹ اگر $\sin(\pi + x) - \sin x = \frac{1}{2}$ حاصل $\sin(\frac{\pi}{2} + 2x)$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $-\frac{7}{8}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۸۰ اگر $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3$ باشد، آن گاه حاصل $\sin \theta \cos \theta$ کدام است؟

- ① 0.2 ② 0.3 ③ 0.4 ④ 0.5

قلم چی - ۱۳۹۸

۸۱ اگر $\alpha = 75^\circ$ باشد، مقدار $\cos^3 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۸۲ اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، آنگاه مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

- ① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۸۳ اگر $\sin 2\theta = a$ باشد، حاصل $1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ کدام است؟

- ① $\frac{a^2}{4}$ ② $4a^2$ ③ $\frac{a^2}{2}$ ④ $2a^2$

قلم چی - ۱۳۹۸

۸۴ اگر $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ باشد، حاصل $\sqrt{\tan x + \cot x}$ چقدر است؟

- ① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{3}$

قلم چی - ۱۳۹۷

۸۵ اگر $\cos x - \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{4 \sin x}$ حاصل $\sin 4x$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$ ② $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2} - 1$ ④ $1 - \sqrt{2}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۸۶ مقدار عبارت $\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{16}$



قلم چی - ۱۳۹۷

۸۷) حاصل $\tan^4 \frac{\pi}{8} - \cot^4 \frac{\pi}{8}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- ۱۲ ① ۲۴ ③ -۲۴ ④ -۱۲ ②

قلم چی - ۱۳۹۸

۸۸) حاصل $\sin^3 \frac{\pi}{12} + \cos^3 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ ① $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{16}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ ④

قلم چی - ۱۳۹۸

۸۹) مقدار عبارت $A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{7\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{5\pi}{8}\right)$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④

قلم چی - ۱۳۹۸

۹۰) اگر $\sin 2x - \cos 2x = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 2x}{\tan x + \cot x}$ کدام است؟

- $\frac{4}{9}$ ① $\frac{5}{36}$ ② $\frac{1}{36}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ④

قلم چی - ۱۳۹۸

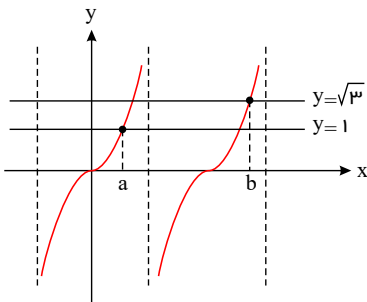
۹۱) اگر $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ باشد، آنگاه مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- $\frac{5}{6}$ ① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④

نمودار توابع مثلثاتی و دوره‌ی تناوب

قلم چی - ۱۳۹۸

۹۲) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ را نشان می‌دهد. حاصل $b - a$ کدام است؟



- $\frac{\pi}{12}$ ① $\frac{5\pi}{12}$ ② $\frac{7\pi}{12}$ ③ $\frac{13\pi}{12}$ ④

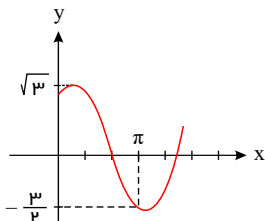
قلم چی - ۱۳۹۸

۹۳) اگر $f(x) = \sin x - \cos x$ و $g(x) = \sin x + \cos x$ ، آنگاه دوره تناوب تابع $f \cdot g$ کدام است؟

- 2π ① π ② $\frac{\pi}{2}$ ③ تابع متناوب نیست. ④

سراسری - ۱۳۹۸

۹۴) شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟



- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ① $\frac{3}{2}$ ② ۲ ④ ۲ ③

قلم چی - ۱۳۹۸

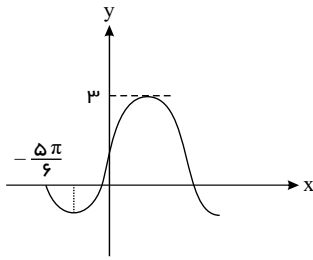
۹۵) به‌ازای چند مقدار صحیح a ، دوره تناوب دو تابع $y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3$ و $y_2 = -3 \cos 3ax - 2$ یکسان است؟

- ۱ ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④



خارج از کشور - ۱۳۹۸

۹۶ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟



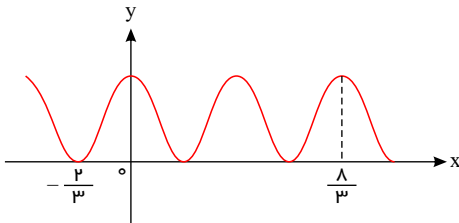
- ① ۱٫۵
② ۲
③ ۲٫۵
④ $1 + \sqrt{3}$

۹۷ نمودار تابع‌های $f(x) = 3 \sin 2x - 2$ و $g(x) = k$ در بازه $(0, T)$ همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. حدود k کدام است؟ قلم‌چی - ۱۳۹۸
(دوره تناوب تابع f است.)

- ① $(-5, 1)$ ② $(-5, -2) \cup (-2, 1)$ ③ $(-2, 1) \cup (1, 5)$ ④ $(-7, -5) \cup (-5, -2)$

قلم‌چی - ۱۳۹۸

۹۸ قسمتی از نمودار تابع $y = 2 + a \cos(b\pi x)$ به صورت زیر است. حاصل $|ab|$ کدام است؟



- ① $\frac{1}{2}$ ② ۳
③ ۲ ④ $\frac{1}{3}$

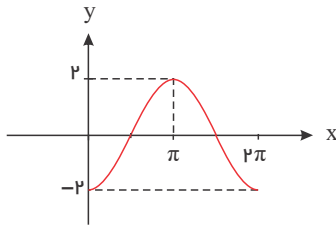
قلم‌چی - ۱۳۹۸

۹۹ تابع $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ با دامنه $(2, a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- ① ۳ ② ۴ ③ ۶ ④ ۸

قلم‌چی - ۱۳۹۸

۱۰۰ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a \cos bx$ است. مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



- ① -۲ ② ۳
③ ۲ ④ -۳

۱۰۱ دوره تناوب تابع با ضابطه $y = 3 \sin cx - 2$ برابر π است. قدرمطلق مجموع مقادیر ماکسیم و مینیم تابع با ضابطه $y = \pi \sin(-x) + c$ کدام است؟ قلم‌چی - ۱۳۹۸

- ① ۴ ② ۳ ③ ۵ ④ ۶

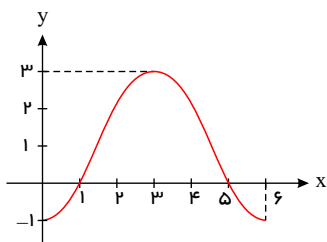
قلم‌چی - ۱۳۹۸

۱۰۲ اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ برابر T باشد، تابع f در بازه‌های $(0, \frac{T}{2})$ و $(\frac{T}{2}, T)$ به ترتیب چگونه است؟

- ① صعودی - صعودی ② صعودی - نزولی ③ نزولی - صعودی ④ نزولی - نزولی

قلم‌چی - ۱۳۹۸

۱۰۳ اگر قسمتی از نمودار تابع $y = a + 2 \sin(\pi(bx - \frac{1}{2}))$ به صورت زیر باشد، حاصل $a - b$ کدام می‌تواند باشد؟



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{4}$
③ $\frac{1}{4}$ ④ ۲



قلم چی - ۱۳۹۸

۱۰۴ دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)$ کدام است؟

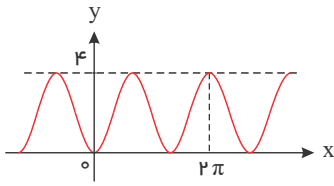
$\frac{\pi}{4}$ (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

π (۲)

2π (۱)

۱۰۵ شکل زیر مربوط به کدام ضابطه می تواند باشد؟



قلم چی - ۱۳۹۸

$y = -2 \sin(\frac{3}{2}x) + 2$ (۲)

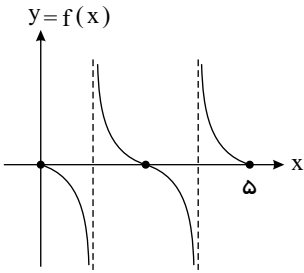
$y = 2 \cos(\frac{2}{3}x) - 2$ (۱)

$y = 4 \sin(\frac{2}{3}x)$ (۴)

$y = -2 \cos(\frac{3}{4}x) + 2$ (۳)

قلم چی - ۱۳۹۹

۱۰۶ شکل مقابل، بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \tan(b\pi x)$ را نشان می دهد. کدام گزینه می تواند صحیح باشد؟



$a > 0, b = \frac{2}{5}$ (۲)

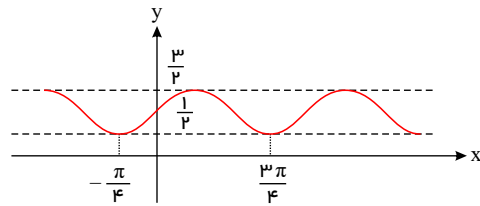
$a \in \mathbb{R}, b = \pm \frac{2}{5}$ (۱)

$a < 0, b = \frac{2}{5}$ (۴)

$a < 0, b = -\frac{2}{5}$ (۳)

سراسری - ۱۳۹۸

۱۰۷ شکل روبه رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. کدام است؟



۱ (۱)

$\frac{3}{2}$ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۰۸ دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

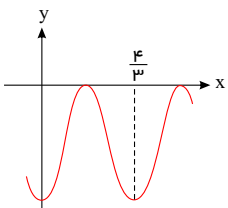
π (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۱۰۹ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2 + a \cos \pi(1 + bx)$ است. در این صورت ab کدام می تواند باشد؟ ($a > 0$) قلم چی - ۱۳۹۷



۳ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

۵ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

۱۱۰ اگر تابع $f(x) = 5 \sin 3(\frac{\pi}{4}x - c)$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ ماکسیمم شود، طول نقطه مینیمم آن، کدام می تواند باشد؟ (c ، عدد ثابت است).

قلم چی - ۱۳۹۸

$\frac{4}{3}$ (۴)

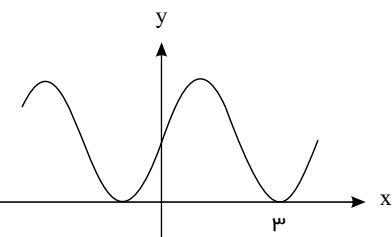
$\frac{11}{6}$ (۳)

$\frac{7}{6}$ (۲)

$-\frac{5}{6}$ (۱)

قلم چی - ۱۳۹۷

۱۱۱ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \sin(b\pi x)$ به صورت زیر است، $a + b$ کدام است؟



$\frac{1}{2}$ (۱)

۱ (۲)

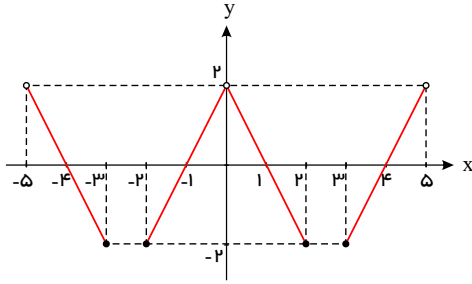
$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۴)



قلم چی- ۱۳۹۸

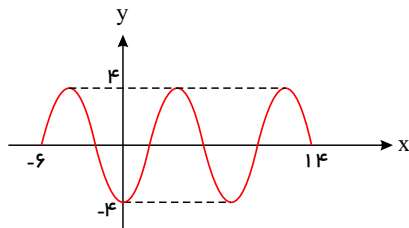
۱۱۲ قسمتی از نمودار تابع متناوب $y = f(x)$ به شکل زیر است. $f(128,1)$ کدام است؟



- ① ۱٫۸
② -۱٫۸
③ -۰٫۲
④ تعریف نشده

قلم چی- ۱۳۹۸

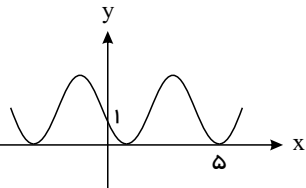
۱۱۳ اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(\pi + bx)$ باشد، مقدار $f(-\frac{32}{3})$ کدام است؟



- ① $2\sqrt{3}$
② $-2\sqrt{3}$
③ ۲
④ -۲

قلم چی- ۱۳۹۷

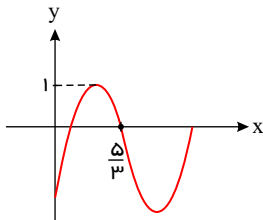
۱۱۴ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - \cos(\pi(\frac{1}{4} + bx))$ به صورت زیر است. $a + b$ کدام است؟



- ① صفر
② ۱٫۵
③ ۱
④ ۰٫۵

قلم چی- ۱۳۹۸

۱۱۵ اگر قسمتی از نمودار $f(x) = a \sin(b\pi x) - 1$ به شکل زیر باشد، مقدار b کدام گزینه می تواند باشد؟



- ① ۲
② -۲
③ $\frac{3}{2}$
④ $-\frac{1}{2}$

قلم چی- ۱۳۹۸

۱۱۶ کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \sin(x - \frac{3\pi}{4}) - 2 \cos(\frac{7\pi}{4} + x)$ با دامنه $[-\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ ، نادرست است؟

① نمودار، ۳ بار محور x ها را قطع می کند.

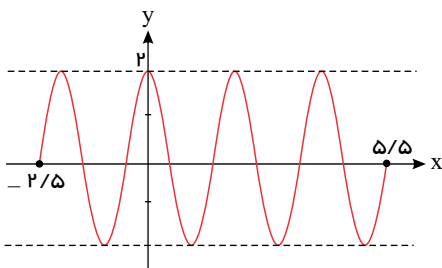
② اختلاف بیش ترین و کم ترین مقدار f برابر با ۶ است.

③ نمودار f در بازه $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ بالای محور x ها قرار دارد.

④ خط $y = -1$ در دو نقطه نمودار را قطع می کند.

قلم چی- ۱۳۹۸

۱۱۷ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{4} + bx)$ است. حاصل ab کدام می تواند باشد؟

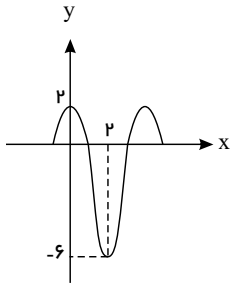


- ① ۴
② ۱
③ ۲
④ ۳



قلم چی- ۱۳۹۸

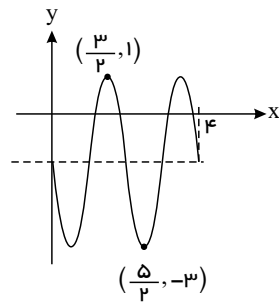
۱۱۸ اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{3} - bx) + c$ باشد، مقدار تابع به ازای $x = \frac{7}{3}$ کدام است؟



- ① $-2\sqrt{3} - 2$
 ② $2\sqrt{3} - 2$
 ③ -4
 ④ $-3\sqrt{3}$

قلم چی- ۱۳۹۸

۱۱۹ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos \pi(\frac{3}{2} + bx) + c$ است. حاصل abc کدام است؟



- ① ۱
 ② ۲
 ③ -۱
 ④ -۲

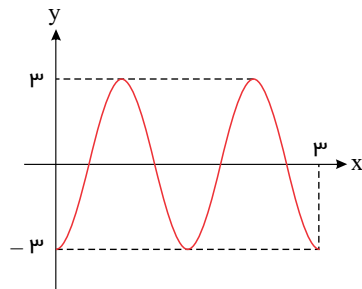
قلم چی- ۱۳۹۹

۱۲۰ تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y = -3 \sin(2\pi x) + 1$ با خط $y = -1$ در بازه $[0, 1.5]$ کدام است؟

- ① ۴
 ② ۳
 ③ ۲
 ④ ۱

قلم چی- ۱۳۹۹

۱۲۱ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(\pi(\frac{3}{4} + bx))$ را نشان می‌دهد. کم‌ترین مقدار $a + b$ کدام است؟



- ① $-\frac{13}{4}$
 ② $\frac{13}{4}$
 ③ $-\frac{5}{4}$
 ④ $\frac{5}{4}$

معادلات مثلثاتی

قلم چی- ۱۳۹۸

۱۲۲ معادله $\sin^2 x = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ① ۱
 ② ۲
 ③ ۳
 ④ ۴

سراسری- ۱۳۹۷

۱۲۳ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟

- ① $x = \frac{k\pi}{4}$
 ② $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
 ③ $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$
 ④ $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

خارج از کشور- ۱۳۹۷

۱۲۴ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟

- ① $x = \frac{k\pi}{5}$
 ② $x = \frac{2k\pi}{5}$
 ③ $x = k\pi + \frac{\pi}{5}$
 ④ $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$



قلم چی - ۱۳۹۸

۱۲۵) معادله $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 3$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۲۶) معادله $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

قلم چی - ۱۳۹۷

۱۲۷) جواب کلی معادله $\sin x(1 + \sin x) = \cos^2 x$ کدام است؟

- ۱) $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۲) $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ ۳) $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۴) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۲۸) معادله $\sin x(\tan x + \cot x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب حقیقی دارد؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۲۹) جواب کلی معادله $\tan 4x = \frac{1}{\tan(4x + \frac{\pi}{3})}$ کدام است؟

- ۱) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{24}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{24}$ ۳) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$ ۴) $x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{48}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۰) مجموع جواب‌های معادله $\cos 3x = \cos 2x$ در بازه $(\pi, 3\pi)$ کدام است؟

- ۱) 12π ۲) 10π ۳) 8π ۴) 6π

سراسری - ۱۳۹۸

۱۳۱) مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۳۲) جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

- ۱) $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۳) $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۳) معادله $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۴) جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{3}{2} \cos x - \sin^2 x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- ۱) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۵) جواب کلی معادله $\sin x \cos x - \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۶) از معادله $(\cos 3x)(\cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \cos^2 x$ چند جواب برای x در فاصله $(0, 2\pi)$ به دست می‌آید؟

- ۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۷) معادله مثلثاتی $\frac{\cos 2x + 4 \sin x - 3}{\sin x - 1} = 3$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۸) کدام یک، ریشه‌ای برای معادله $\cos 5x = 2 \cos^2 x - 1$ است؟

- ۱) $\frac{3\pi}{7}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{7}$ ۴) $\frac{4\pi}{7}$



قلم چی - ۱۳۹۸

معادله $\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \frac{1}{12}$ در فاصله $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟ (۱۳۹)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

قلم چی - ۱۳۹۸

معادله $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - \cos^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ (۱۴۰)

۳ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

قلم چی - ۱۳۹۸

جواب کلی معادله $2\sin^2 x = 1 - \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟ (۱۴۱)

$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۴)

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳)

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$ (۲)

$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16}$ (۱)

خارج از کشور - ۱۳۹۸

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟ (۱۴۲)

4π (۴)

$\frac{7\pi}{2}$ (۳)

3π (۲)

$\frac{5\pi}{2}$ (۱)

قلم چی - ۱۳۹۷

اگر جواب معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^3 x = \cos x$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر i کدام است؟ (۱۴۳)

$\{1, 2\}$ (۴)

$\{1, 2, 3\}$ (۳)

$\{0, 1\}$ (۲)

$\{1, 2, 0\}$ (۱)

قلم چی - ۱۳۹۷

معادله‌ی $\cos^6 x - \sin^6 x = 1 - \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ (۱۴۴)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

قلم چی - ۱۳۹۸

مجموع جواب‌های معادله $\frac{8\sin^2 x}{1 + \tan^2 x} + 3\cos 2x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (۱۴۵)

4π (۴)

2π (۳)

6π (۲)

$\frac{5\pi}{2}$ (۱)

قلم چی - ۱۳۹۸

معادله $\tan 2x = 3\tan x$ در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$ چند جواب دارد؟ (۱۴۶)

۹ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

قلم چی - ۱۳۹۸

مجموع جواب‌های متمایز معادله $\cos 2x + \cos^2 x + 4\sin x = 3$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟ (۱۴۷)

π (۴)

$\frac{5\pi}{4}$ (۳)

2π (۲)

$\frac{3\pi}{2}$ (۱)

کاربرد مثلثات

در یک متوازی‌الاضلاع، یکی از قطرهای دو برابر دیگری و زاویه بین دو قطر 30° است. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع 32 واحد مربع باشد، اندازه قطر کوچک آن چه قدر است؟ (۱۴۸)

قلم چی - ۱۳۹۸

$8\sqrt{2}$ (۴)

۸ (۳)

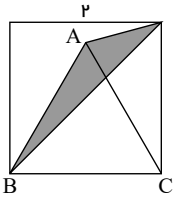
$4\sqrt{2}$ (۲)

۴ (۱)



۱۴۹ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC درون یک مربع به طول ضلع ۲ قرار گرفته است. مساحت مثلث رنگی کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۸



$$(\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2})$$

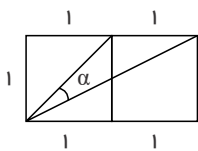
۲ $\sqrt{3}-1$

۴ $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

قلم چی - ۱۳۹۸



۱۵۰ در مستطیل روبه‌رو، $\sin \alpha$ کدام است؟

۲ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

۴ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

۱ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

۳ $\frac{1}{3}$

۱۵۱ مساحت متوازی‌الاضلاعی که یکی از قطرهای آن ۱۲ و زاویه بین دو قطر ۱۲۰ درجه باشد، برابر $18\sqrt{3}$ است. اندازه قطر دیگر کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۴ $4\sqrt{3}$

۳ ۱۲

۲ ۶

۱ ۳

۱۵۲ طول دو ضلع مثلثی به مساحت ۶ به صورت $a = 3\sqrt{2}$ و $b = 4$ و زاویه بین آن‌ها θ است. اگر θ را 75° کاهش و طول اضلاع a و b را $\sqrt{2}$ برابر کنیم، مساحت مثلث چند برابر می‌شود؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۴ $\sqrt{6}$

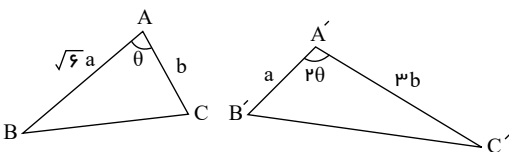
۳ $\sqrt{3}$

۲ $\sqrt{2}$

۱ ۱

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۵۳ اگر $\tan \theta = \sqrt{7}$ باشد، نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟



۲ $\sqrt{3}$

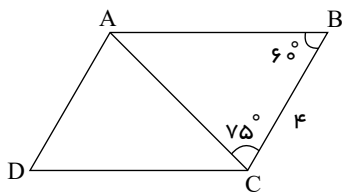
۴ ۲

۱ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳ ۳

قلم چی - ۱۳۹۹

۱۵۴ در متوازی‌الاضلاع زیر، اگر $BC = 4$ باشد، در این صورت طول قطر AC برابر با کدام است؟



۲ $2\sqrt{6}$

۴ $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

۱ ۶

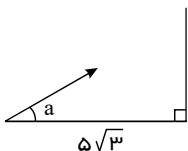
۳ $2\sqrt{5}$

۱۵۵ مطابق شکل زیر، گلوله‌ای در فاصله $5\sqrt{3}$ متری از یک دیوار با سرعت $10 \frac{m}{s}$ و با زاویه حاده α نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود.

می‌دانیم مسافت افقی طی شده (d) برحسب سرعت پرتاب گلوله (v) و زاویه پرتاب (α) از رابطه $d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{10}$ به دست می‌آید. حدود α کدام

قلم چی - ۱۳۹۸

باشد تا گلوله قبل از رسیدن به زمین به دیوار برخورد کند؟



۲ $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$

۴ $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

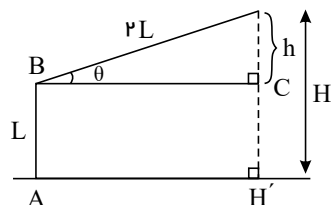
۱ $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6}$

۳ $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

پاسخ نامه تشریحی

ابتدا ارتفاع نوک گیره این روبات تا سطح زمین را به صورت تابعی از θ می نویسیم:

$$h = 2L \sin \theta \Rightarrow H = L + 2L \sin \theta$$



می دانیم بیشترین مقدار ممکن زمانی رخ می دهد که $\sin \theta = 1$ باشد که در این صورت: $H = 3L$
پس طبق فرض، روبات در حالتی قرار دارد که:

$$H = \frac{3L}{2} \Rightarrow L + 2L \sin \theta = \frac{3L}{2} \Rightarrow 2L \sin \theta = \frac{L}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

در نتیجه:

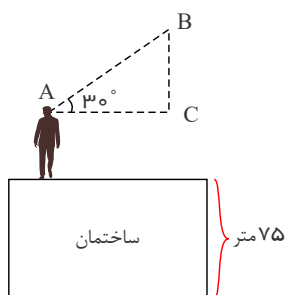
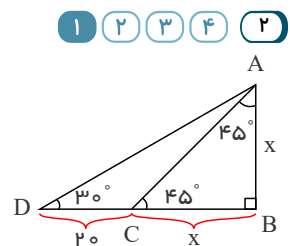
$$AH' = BC = 2L \cos \theta = 2L \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2} L$$

$$\triangle ABC : \hat{ACB} = \hat{CAB} = 45^\circ \Rightarrow AB = BC = x$$

$$\triangle ADB : \tan 30^\circ = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{20 + x}$$

$$\Rightarrow 3x = 20\sqrt{3} + \sqrt{3}x \Rightarrow (3 - \sqrt{3})x = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{60(\sqrt{3} + 1)}{9 - 3} \Rightarrow x = \frac{60(\sqrt{3} + 1)}{6} = 10(\sqrt{3} + 1)$$

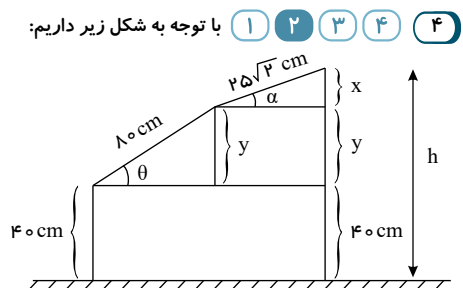


$$\sin \alpha = \frac{x}{25\sqrt{2}} \Rightarrow x = 25\sqrt{2} \sin \alpha, \sin \theta = \frac{y}{80} \Rightarrow y = 80 \sin \theta$$

$$h = 40 + x + y = 40 + 25\sqrt{2} \sin \alpha + 80 \sin \theta$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{440.4} \Rightarrow BC = 220.2$$

$\Rightarrow$ فاصله بالگرد تا سطح زمین = $220.2 + 1.8 + 75 = 297$ (متر)





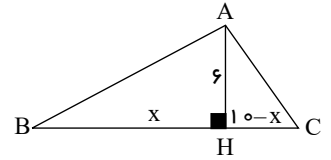
$$\Rightarrow h = 40 + 25\sqrt{2} \sin(-45^\circ) + 80 \sin(0) = 40 - 25\sqrt{2} \sin 45^\circ + 0$$

$$\Rightarrow h = 40 - 25\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 40 - 25 = 15$$

۵ اگر طول ضلع BH را برابر x در نظر بگیریم، طول ضلع CH برابر $(10 - x)$ خواهد شد.

$$\begin{cases} \tan \hat{B} = \frac{6}{x} \\ \tan \hat{C} = \frac{6}{10-x} \end{cases} \rightarrow 3 \tan \hat{B} = 2 \tan \hat{C}$$

$$3\left(\frac{6}{x}\right) = 2\left(\frac{6}{10-x}\right) \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{10-x} \rightarrow 30 - 3x = 2x \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$$



لذا مثلث AHB یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به طول ساق ۶ می باشد که اندازه ضلع AB (وتر) برابر $6\sqrt{2}$ است.

۶ اگر θ بر حسب رادیان و r شعاع دایره و L اندازه ی کمان روبه رو به زاویه ی θ باشد داریم:

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \theta = \frac{\frac{\pi}{5}}{1} = \frac{\pi}{5} \text{ رادیان}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{5}}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{5} \rightarrow D = 36$$

۷ در ناحیه ی دوم دایره ی مثلثاتی مقادیر سینوس، مثبت و مقادیر کتانژانت منفی است.

۸

$$\tan \alpha = \frac{AA'}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{0 < \alpha < 90^\circ} \alpha = 30^\circ$$

$$OB' = \cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۹

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{5}{r} \rightarrow r = \frac{30}{\pi}$$

$$\Rightarrow S = \pi r^2 = \pi \times \frac{900}{\pi^2} = \frac{900}{\pi}$$

۱۰ یک دور کامل در دایره، ۶۰ دقیقه است. بنابراین عقربه دقیقه شمار $\frac{2}{3}$ دایره را طی کرده است. دایره کامل 2π رادیان است. بنابراین داریم:

$$\text{زاویه دوران عقربه بر حسب رادیان} = \frac{2}{3} \times 2\pi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\Rightarrow r = \frac{l(\text{طول کمان})}{\theta(\text{بر حسب رادیان})} = \frac{45}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{135}{4\pi}$$

$$= \frac{60}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{45}{\pi} \text{ (سانتی متر)}$$

۱۱

$$\rightarrow \begin{cases} \text{ناحیه دوم} \quad 3 \approx 3 \times 57,3^\circ \approx 171,9^\circ \\ \text{ناحیه سوم} \quad 4,5 \approx 4,5 \times 57,3^\circ \approx 257,85^\circ \end{cases}$$

۱۲

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{18}{\pi}$$

۱۳

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 18^\circ \\ x + y &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x = 108^\circ \Rightarrow x = 54^\circ, y = 90^\circ - 54^\circ \Rightarrow y = 36^\circ$$

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

۱۴

$$\widehat{AB} \text{ طول کمان } AB = r\alpha = r \times \frac{\pi}{6} = \frac{r\pi}{6}$$

$$2r + \frac{r\pi}{6} = 12 + \pi \rightarrow r\left(2 + \frac{\pi}{6}\right) = 6\left(2 + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow r = 6$$

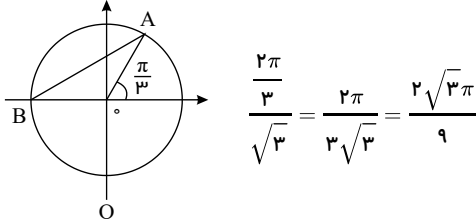


$$\rightarrow \widehat{AMB} = r \times \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 6 \times \frac{11\pi}{6} \rightarrow \widehat{AMB} = 11\pi$$

مختصات نقطه $A = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ است و $B(-1, 0)$ می‌شود. پس: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵)

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

طول کمان AB هم برابر زاویه $\widehat{AOB}$ است و $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ می‌شود. پس:



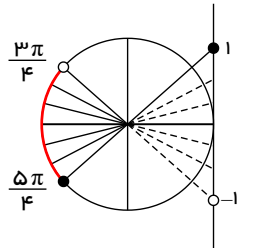
$$\frac{\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۶)

$$\frac{3\pi}{8} < \alpha \leq \frac{5\pi}{8} \xrightarrow{\times 2} \frac{3\pi}{4} < 2\alpha \leq \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{2\alpha = x} \frac{3\pi}{4} < x \leq \frac{5\pi}{4}$$

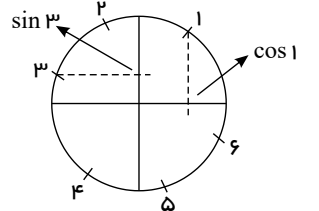
$$-1 < \frac{-m+1}{2} \leq 1 \rightarrow -2 < -m+1 \leq 2 \rightarrow -3 < -m \leq 1 \rightarrow -1 \leq m < 3 \rightarrow m \in [-1, 3)$$

باتوجه به دایره مثلثاتی مشخص می‌شود که $-1 < \tan x \leq 1$ ، داریم:



ابتدا توجه کنید که $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ، $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۷)

$$1 \text{ rad} \approx 57^\circ \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ rad} \approx 114^\circ \\ 3 \text{ rad} \approx 171^\circ \\ 4 \text{ rad} \approx 228^\circ \end{cases}$$



گزینه ۱، نادرست است، زیرا: $\cos(-1) < 0 < \sin 4$

گزینه ۲، نادرست است، زیرا: $\cos 2 < 0 < \sin 1$

گزینه ۴، نادرست است، زیرا: $\cos(-2) < 0 < \sin(-4)$

گزینه ۳، با توجه به دایره مثلثاتی (شکل بالا) درست است.

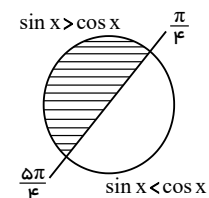
اول باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۸)

(*) انتهای کمان x در ناحیه اول یا چهارم است. $\Rightarrow \cos x \geq 0$

از طرفی:

$$\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x \Rightarrow \sqrt{\cos x} = \sin x - \cos x$$

$$\sin x - \cos x \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \cos x$$



$\Rightarrow$ انتهای کمان x در ناحیه اول است.

با توجه به نکته‌ی مقابل و حالت (*) داریم:

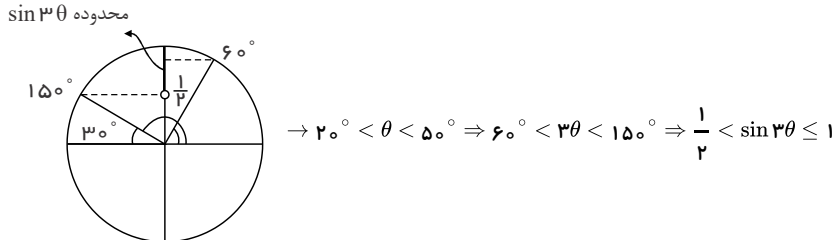


مساحت و شعاع دایره (۲) را به ترتیب با S' و R' و مساحت و شعاع دایره (۱) را به ترتیب با S و R نمایش می دهیم، داریم:

$$\frac{S'}{S} = 3 \rightarrow \frac{\pi R'^2}{\pi R^2} = 3 \rightarrow \frac{R'}{R} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} = \frac{R'(\frac{\pi}{6})}{R(\frac{\pi}{18})} = \frac{R'}{R} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به دایره مثلثاتی داریم:



$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < m \leq 3 \Rightarrow m \in (2, 3]$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$D = 900^\circ \Rightarrow \frac{900}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = 5\pi \Rightarrow \text{طول کمان طی شده } \ell = r \cdot \theta = 5\pi \times \frac{1}{\pi} = 5$$

چون هر یک ساعت $2/5$ متر می چرخد، پس در مدت ۲ ساعت ۵ متر می چرخد.

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا باید ببینیم در یک دقیقه، کامیون چه مسافتی را طی می کند.

$$60 \frac{km}{h} \times \frac{1h}{60 \min} \times \frac{1000 m}{1 km} = 1000 \frac{m}{\min}$$

کامیون در یک دقیقه، ۱۰۰۰ متر حرکت می کند، پس داریم:

$$2\pi r = 2 \times 3 \times 1 = 6 \Rightarrow 6n + \frac{2}{3} \times 6 = 1000 \Rightarrow 6n = 1000 - 4 = 996 \Rightarrow n = 166$$

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 600^\circ \\ \gamma &= -3\pi = -3 \times 180^\circ = -540^\circ \\ \alpha &= (3 \times 360^\circ) + 60^\circ = 6^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = \beta - \gamma \rightarrow \alpha = 600^\circ - (-540^\circ) = 1140^\circ$$

بنابراین α در ربع اول قرار دارد.

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$C \text{ طول کمان در دایره } C' \Rightarrow \ell = \ell' \Rightarrow r_C \cdot \alpha = r_{C'} \cdot \alpha'$$

$$\Rightarrow r_C \times \frac{\pi}{3} = r_{C'} \times \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{1}{3} r_C = \frac{1}{12} r_{C'} \Rightarrow r_{C'} = 4r_C$$

$$\frac{S_C}{S_{C'}} = \frac{\pi r_C^2}{\pi r_{C'}^2} = \left(\frac{r_C}{r_{C'}}\right)^2 = \left(\frac{r_C}{4r_C}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴ در هر ۶۰ دقیقه، عقربه ساعت شمار $\frac{\pi}{6}$ رادیان و عقربه دقیقه شمار 2π رادیان می چرخد، پس داریم:

$$\text{عقربه ساعت شمار} \Rightarrow \frac{60}{48} = \frac{\frac{\pi}{6}}{x} \Rightarrow x = \frac{48 \times \frac{\pi}{6}}{60} = \frac{8\pi}{60} = \frac{2\pi}{15}$$

$$\text{عقربه دقیقه شمار} \Rightarrow \frac{60}{48} = \frac{2\pi}{y} \Rightarrow y = \frac{48 \times 2\pi}{60} = \frac{8\pi}{5}$$

$$x + y = \frac{2\pi}{15} + \frac{8\pi}{5} = \frac{2\pi + 24\pi}{15} = \frac{26\pi}{15}$$

۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر اندازه زاویه برحسب رادیان را با R و برحسب درجه را با D نشان دهیم، داریم:

$$R_2 = 3R_1, \quad D_2 = 60 + D_1, \quad \frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow D = \frac{180R}{\pi}$$



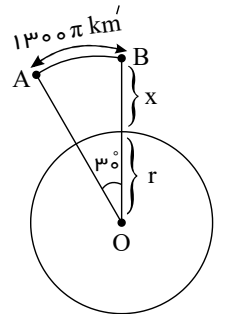
$$D_v = 60 + D_1 \Rightarrow \frac{180R_v}{\pi} = 60 + \frac{180R_1}{\pi} \Rightarrow 180R_v = 60\pi + 180R_1$$

$$3R_v = \pi + 3R_1 \Rightarrow 3 \times 3R_1 = \pi + 3R_1 \Rightarrow 6R_1 = \pi \Rightarrow R_1 = \frac{\pi}{6}$$

۲۷ می‌دانیم 30° معادل $\frac{\pi}{6}$ رادیان است، پس داریم:

$$\widehat{AB} \text{ کمان } \ell = (x + r) \cdot \frac{\pi}{6} = 1300\pi \Rightarrow x + r = 6 \times 1300$$

$$\Rightarrow x + 6400 = 7800 \Rightarrow x = 1400 \text{ km}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

رادیان $\frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$ زاویه مرکزی بین دو کابین متوالی

$$\frac{43\pi}{10} = \frac{86\pi}{20} = \frac{80\pi}{20} + \frac{6\pi}{20} = 4\pi + 6\left(\frac{\pi}{20}\right)$$

$$11 = 5 + 6 = \text{موقعیت جدید}$$

یعنی ۲ دور کامل حرکت کرده و سپس ۶ کابین جلو رفته است، پس:

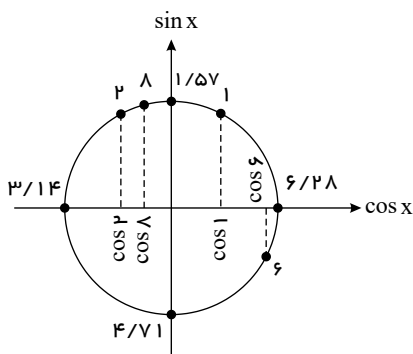
۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$\text{زاویه طی شده} = \frac{\ell_1}{r_1} = \frac{16\pi}{8} = 2\pi \Rightarrow r_1 = 8 \text{ cm}, \ell_1 = 16\pi$$

یعنی عقربه دقیقه‌شمار یک دور کامل را طی کرده است و از لحاظ زمانی یعنی یک ساعت گذشته است و می‌دانیم در یک ساعت، عقربه ساعت‌شمار $\frac{\pi}{6}$ رادیان را طی می‌کند، پس داریم:

$$\text{عقربه ساعت‌شمار: } r_v = 6 \text{ cm}, \theta_v = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \ell_v = r_v \theta_v = 6 \times \frac{\pi}{6} = \pi \text{ cm}$$

۳۰ اول باید مکان زوایای موجود را روی دایره مثلثاتی تعیین کنیم، سپس کسینوس آن‌ها را بیابیم. توجه کنید که π را حدوداً 3.14 در نظر می‌گیریم.

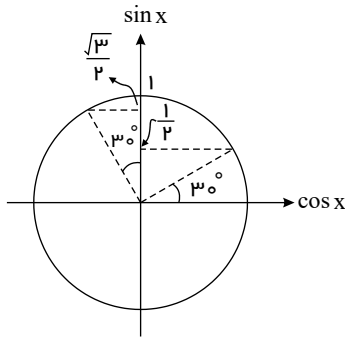


$$\cos 2 < \cos 8 < \cos 1 < \cos 6$$

طبق دایره مثلثاتی بالا داریم:

در نتیجه $\cos 2$ از همه آن‌ها کوچک‌تر است.

۳۱ کافی است زاویه‌ها را در دایره مثلثاتی نشان دهیم می‌توانیم ببینیم وقتی $\alpha = 30^\circ$ است، $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ و وقتی α به 90° می‌رسد، $\sin \alpha$ هم به ماکسیمم مقدار خود یعنی عدد ۱ رسیده است چون مقدار $\sin \alpha$ از 90° تا 120° کاهش می‌یابد.



بنابراین داریم:

$$[a, b] = \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow \max(b - a) = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

می‌دانیم که وقتی عقربه دقیقه‌شمار یک دور کامل می‌چرخد، عقربه ساعت‌شمار ۱ ساعت یعنی $\frac{1}{12}$ دور کامل می‌چرخد. پس می‌توان گفت عقربه دقیقه‌شمار همیشه ۱۲ برابر عقربه ساعت‌شمار می‌چرخد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۲)

حال که دقیقه‌شمار $\frac{3\pi}{11}$ رادیان طی کرده، ساعت‌شمار $\frac{1}{12} \times \frac{3\pi}{11}$ رادیان طی خواهد کرد، یعنی $\frac{\pi}{44}$ رادیان.

طول ضلع AB برابر $\tan \alpha$ می‌باشد، پس مساحت مثلث AOB برابر است با: (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۳)

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times OA \xrightarrow{OA=1} S = \frac{1}{2} \times \tan \alpha$$

مختصات نقطه P روی دایره مثلثاتی به صورت $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ می‌باشد.

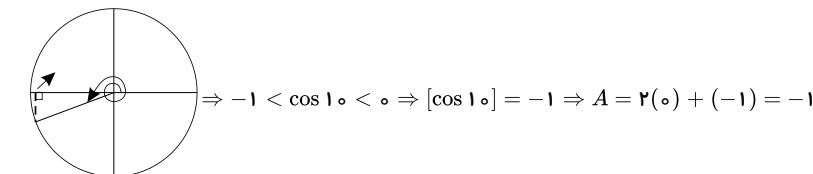
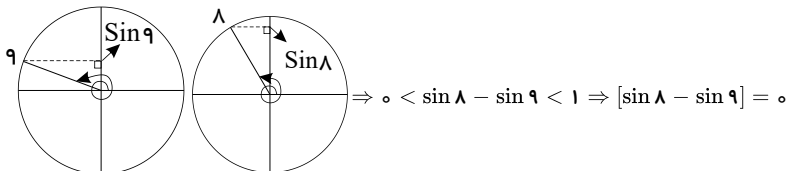
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (2a - 1)^2 + a^2 = 1 \Rightarrow 5a^2 - 4a + 1 = 1 \Rightarrow a(5a - 4) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق} \\ a = \frac{4}{5} & \text{ق ق} \end{cases}$$

پس $\cos \alpha$ برابر $\frac{4}{5}$ می‌باشد و $\sin \alpha$ برابر $\frac{3}{5}$ است.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

زاویه‌های داده‌شده برحسب رادیان هستند و هر رادیان تقریباً برابر با 57° درجه است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۴)



(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۵)

$$\begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = R\alpha \\ \alpha = 4\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = 4R\beta \end{cases}$$

$$L_1 \times L_r = \frac{\pi}{9} \times \pi R^2 \rightarrow R\beta \times 4R\beta = \frac{\pi^2 R^2}{9} \rightarrow 4\beta^2 = \frac{\pi^2}{9}$$

$$\rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{3} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{6} \rightarrow \beta = 30^\circ \text{ و } \alpha = 4\beta \xrightarrow{\beta=30^\circ} \alpha = 120^\circ$$

مثلث متساوی‌الساقین $\gamma \rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \rightarrow \gamma = 30^\circ \rightarrow \gamma = \beta$

پس مثلث متساوی‌الساقین است و زاویه قائمه ندارد.



۳۶ می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است و چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ است انتهای کمان در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = -\cos^2 x$$

۳۷ می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است و چون $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ است انتهای کمان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right) = \frac{1}{|\cos x|} (1 - \sin^2 x) = \frac{-1}{\cos x} (\cos^2 x) = -\cos x$$

۳۸ اگر دو زاویه α و β متمم باشند، داریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta, \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

چون $\gamma x = \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$x + 6x = \gamma x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x = \sin 6x$$

$$2x + 5x = \gamma x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 2x = \cos 5x$$

$$3x + 4x = \gamma x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan 3x = \cot 4x$$

$$\frac{\cos x \sin 2x \tan 3x}{\cot 4x \cos 5x \sin 6x} = \frac{\sin 6x \cos 5x \cot 4x}{\cot 3x \cos 4x \sin 5x} = 1$$

۳۹ می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا طرفین تساوی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\div \cos^2 x}{\cos^2 x} \left(2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \frac{\sin x}{\cos x} + 4 \right) = \frac{3}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 \tan^2 x - 3 \tan x + 4 = 3(1 + \tan^2 x)$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + 3 \tan x - 5 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{c}{a} = -5 \end{cases}$$

$$\tan x \text{ مجموعه مقادیر ممکن برای } 1 + (-5) = -4$$

۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\tan x + \cot x = \frac{5}{2} \rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\times 2 \tan x} 2 \tan^2 x + 2 = 5 \tan x \rightarrow 2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9 \rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{5 + 3}{4} = 2 \text{ غ ق } ۲ \\ \tan x = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \cot x = 2 \end{cases}$$

$$\text{می‌دانیم: } 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5} \rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin \beta} = \frac{-\sin \alpha}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\text{پس: } A = (-1) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

$$\tan \frac{17\pi}{6} = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{11\pi}{3} = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{10\pi}{3} = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } \tan \frac{17\pi}{6} \cdot \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{\text{تک تک جملات را بر } \cos \alpha \text{ تقسیم می‌کنیم}}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$$

$$\text{اگر } \cos \alpha + \cos \beta = 0 \rightarrow \alpha + \beta = \pi$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} - x = \pi \rightarrow 2x = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{3\pi}{8}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

$$\sin 75^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-42^\circ) = \cos 42^\circ = \cos(36^\circ + 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-315^\circ) = -\tan(315^\circ) = -\tan(36^\circ - 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\text{پس: } \frac{\sin 75^\circ + \cos(-42^\circ)}{2 \tan(-315^\circ)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{گزینه ۴: } \sin 15^\circ = \sin(18^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2} \checkmark$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷

$$\sin\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$A = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{3}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\frac{3}{5} \\ \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \sin \alpha = -\frac{4}{5} \\ \cot \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(3\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\sin : \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100} = 0,27$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹

$$\frac{A \sin 108^\circ + \cos 72^\circ}{A \sin 918^\circ} = \frac{A \sin(90^\circ + 18^\circ) + \cos(90^\circ - 18^\circ)}{A \sin(720^\circ + 198^\circ)}$$

$$= \frac{A \cos 18^\circ + \sin 18^\circ}{A \sin 198^\circ} = \frac{A \cos 18^\circ + \sin 18^\circ}{A \sin(180^\circ + 18^\circ)} = \frac{A \cos 18^\circ + \sin 18^\circ}{-A \sin 18^\circ}$$

$$= \frac{A \cos 18^\circ}{-A \sin 18^\circ} + \frac{\sin 18^\circ}{-A \sin 18^\circ} = -\cot 18^\circ - \frac{1}{A} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{A} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{A} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{A} = \frac{-3 - 2\alpha}{3\alpha}$$

$$\rightarrow A = \frac{3\alpha}{-3 - 2\alpha} = \frac{-3\alpha}{3 + 2\alpha}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰ اگر $\alpha + \beta = \pi$ باشد آن گاه $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ است پس:

$$(x + 30^\circ) + (2x + 60^\circ) = 180^\circ \Rightarrow 3x = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

$$\frac{1 + \tan 30^\circ}{1 + \cot 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{3(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱ هر کدام از نسبت های مثلثاتی داده شده را حساب می کنیم.

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) = \cos\frac{17\pi}{6} = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{19\pi}{4} = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = -\sin\frac{11\pi}{6} = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۲

$$\frac{2\sin 20^\circ + \cos 29^\circ}{\sin 16^\circ + 2\cos 7^\circ} = \frac{2\sin(18^\circ + 2^\circ) + \cos(27^\circ + 2^\circ)}{\sin(18^\circ - 2^\circ) + 2\cos(9^\circ - 2^\circ)}$$

$$= \frac{-2\sin 2^\circ + \sin 2^\circ}{\sin 2^\circ + 2\sin 2^\circ} = \frac{-\sin 2^\circ}{3\sin 2^\circ} = -\frac{1}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳

می‌دانیم که $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$ است.

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

ناحیه سوم

$$\rightarrow \sin \theta = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{-3\sqrt{10}}{10}} = \frac{1}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 1^2 \rightarrow y^2 = \frac{8}{9} \rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \rightarrow \tan \alpha = -2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow A = 3\sin(\pi + \alpha) + 2\tan^2 \alpha = 3(-\sin \alpha) + 2\tan^2 \alpha = 3\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + 2(-2\sqrt{2})^2$$

$$\rightarrow A = -2\sqrt{2} + 2(8) \rightarrow A = 16 - 2\sqrt{2}$$

۵۵ اگر نقطه $P(x, y)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم نقطه $P'(-x, -y)$ به دست می‌آید که در دایرهٔ مثلثاتی نقطه P' نسبت به نقطه P به اندازه π رادیان اختلاف دارد و داریم:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

$$\sin(\pi + x) = \frac{1}{2} + \sin(\pi - x) \rightarrow -\sin x = \frac{1}{2} + \sin x \rightarrow -\frac{1}{2} = 2\sin x$$

ناحیه سوم

$$\rightarrow \sin x = -\frac{1}{4} \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$



$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

۵۷ می‌دانیم که $\tan 180^\circ = 0$ است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \tan 80^\circ + \tan 100^\circ + \tan 120^\circ + \tan 140^\circ + \tan 160^\circ + \cancel{\tan 180^\circ}$$

$$\rightarrow A = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \tan 80^\circ + \tan(180^\circ - 80^\circ) + \tan(180^\circ - 60^\circ)$$

$$+ \tan(180^\circ - 40^\circ) + \tan(180^\circ - 20^\circ)$$

$$\rightarrow A = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \tan 80^\circ - \tan 80^\circ - \tan 60^\circ - \tan 40^\circ - \tan 20^\circ = 0$$

۵۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin 451^\circ = \sin(360^\circ + 91^\circ) = \sin 91^\circ = \sin(90^\circ + 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

حال گزینه ۲، ۳ و ۴ را بررسی می‌کنیم:

$$۲ \text{ گزینه } ۲: -\sin 269^\circ = -\sin(270^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$۳ \text{ گزینه } ۳: \sin 631^\circ = \sin(360^\circ + 180^\circ + 90^\circ + 1^\circ) = \sin(180^\circ + 90^\circ + 1^\circ) = -\sin(90^\circ + 1^\circ) = -\cos 1^\circ$$

$$۴ \text{ گزینه } ۴: \cos\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \cos(-1^\circ) = \cos 1^\circ$$

۵۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha - 3\pi) = -\sin(3\pi + \pi - \alpha) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - 2\sin(\alpha - 3\pi)}{3\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} = 2 \Rightarrow \frac{\sin \alpha - 2(-\sin \alpha)}{3\cos \alpha} = 2 \Rightarrow \frac{3\sin \alpha}{3\cos \alpha} = 2$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = 2 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2}$$

۶۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos 260^\circ = \cos(180^\circ + 80^\circ) = -\cos 80^\circ$$

$$\cos 550^\circ = \cos(360^\circ + 190^\circ) = \cos 190^\circ = \cos(270^\circ - 80^\circ) = -\sin 80^\circ$$

$$\sin 730^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$\text{پس: } A = \frac{-\cos 80^\circ - (-\sin 80^\circ)}{\sin 80^\circ + \cos 80^\circ} = \frac{-\frac{\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} + \frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}}{\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} + \frac{\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}} = \frac{-\cot 80^\circ + 1}{1 + \cot 80^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

۶۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} 2\cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) < 0 \Rightarrow -2\cos x + \cos x < 0 \Rightarrow -\cos x < 0 \Rightarrow \cos x > 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) > 0 \Rightarrow \cot x + \cot x > 0 \Rightarrow 2\cot x > 0 \Rightarrow \cot x > 0 \end{cases}$$

فقط در ناحیه اول است که هم کسینوس و هم کتانژانت مثبت هستند.

۶۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + 2\tan\left(\frac{25\pi}{4}\right) - 3\cos\left(\frac{124\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2\tan\left(\frac{25\pi}{4}\right) - 3\cos\left(\frac{124\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2\tan\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos\left(41\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} + 2\tan \frac{\pi}{4} - 3\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \times 1 + 3\cos \frac{\pi}{3} = \frac{5}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 4$$

۶۳ زوایای داده شده را باید با کمک 35° بازنویسی کنیم، لذا داریم: ۱ ۲ ۳ ۴



$$\frac{\sin(180^\circ + 35^\circ) + \cos(90^\circ + 35^\circ)}{\tan(360^\circ - 35^\circ) - \cot(270^\circ - 35^\circ)} = \frac{-\sin 35^\circ - \sin 35^\circ}{-\tan 35^\circ - \tan 35^\circ} = \frac{-2 \sin 35^\circ}{-2 \tan 35^\circ} = \frac{\sin 35^\circ}{\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}} = \cos 35^\circ$$

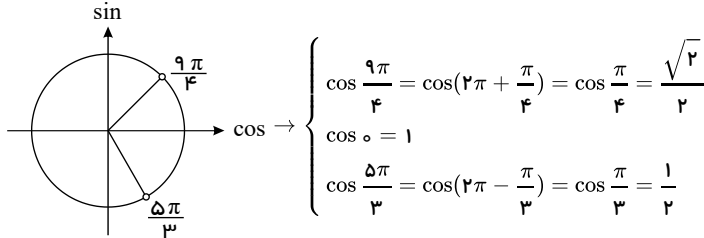
با توجه به این که $x = \sin 35^\circ$ و این زاویه در ناحیه اول می باشد، داریم:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \rightarrow \cos^2 35^\circ = 1 - \sin^2 35^\circ \rightarrow \cos 35^\circ = \sqrt{1 - x^2}$$

با به دست آوردن محدوده $2x$ داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴

$$-\frac{\pi}{18} < \frac{x - \pi}{3} < \frac{\pi}{24} \xrightarrow{\times 3} -\frac{\pi}{6} < x - \pi < \frac{\pi}{8}$$

$$\xrightarrow{+\pi} \frac{5\pi}{6} < x < \frac{9\pi}{8} \xrightarrow{\times 2} \frac{5\pi}{3} < 2x < \frac{9\pi}{4}$$



در این بازه، $\cos 2x$ هریک از مقادیر بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ را می تواند اختیار کند.

یعنی: $\frac{1}{2} < \cos 2x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 2m - 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{4} < m \leq 1$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۵

$$\cos(\frac{7\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \cos(2\pi + \frac{3\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow -\sin x - \cos x = \frac{2}{3} \rightarrow \sin x + \cos x = -\frac{2}{3}$$

می دانیم که $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ است بنابراین نیاز به پیدا کردن $\sin x \cdot \cos x$ داریم. برای این کار عبارت آخر به دست آمده را به توان ۲ می رسانیم.

$$(\sin x + \cos x)^2 = (-\frac{2}{3})^2 \rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{5}{9} \rightarrow \sin x \cos x = -\frac{5}{18}$$

پس: $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$

$$= (-\frac{2}{3})^3 - 3(-\frac{5}{18})(-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{27} - \frac{15}{27} = -\frac{23}{27}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶

$$\sin \frac{4\pi}{5} = \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) = \sin \frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ$$

$$\cos 224^\circ = \cos(360^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$$

$$\rightarrow \log(\sin 36^\circ) - \log(\cos 36^\circ) + \log A = 0 \rightarrow \log\left(\frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}\right) + \log A = 0$$

$$\rightarrow \log A = -\log(\tan 36^\circ) \rightarrow \log A = \log(\tan 36^\circ)^{-1}$$

$$\rightarrow \log A = \log(\cot 36^\circ) \rightarrow \log A = \log(\tan(90^\circ - 36^\circ)) \rightarrow \log A = \log(\tan 54^\circ) \rightarrow A = \tan 54^\circ$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۷

$$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \cos(2\pi + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha + 2 \sin \alpha}{-\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 2$$

$$\rightarrow -2 \sin \alpha + 6 \cos \alpha = -\cos \alpha + 2 \sin \alpha \rightarrow -4 \sin \alpha = -3 \cos \alpha \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} \rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4}$$



$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{49}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\rightarrow \frac{65}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{65} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

$$\pi \leq x \leq 2\pi \rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{b>0} -b \leq b \cos x \leq b$$

$$\rightarrow a - b \leq a + b \cos x \leq a + b \rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{1}{2} \\ a + b = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow a = 1, b = \frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos x \rightarrow f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۹

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{2} \rightarrow \cot \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin(\pi - \theta) + 2 \cos(\pi + \theta)}{2 \sin(2\pi - \theta) + \cos(2\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta - 2 \cos \theta}{-2 \sin \theta + \cos \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\sin \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}}{\frac{-2 \sin \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{1 - 2 \cot \theta}{-2 + \cot \theta}$$

$$= \frac{1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-2 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{-\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5}$$

می‌دانیم $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰

$$\frac{\tan x - \cot x}{\cos 2x} = 5 \rightarrow \frac{-2 \cot 2x}{\cos 2x} = 5 \rightarrow \frac{-2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{\cos 2x} = 5 \rightarrow \frac{-2}{\sin 2x} = 5 \rightarrow \sin 2x = -\frac{2}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\sin 2x = -\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

می‌دانیم $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۱

$$\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2} \rightarrow 2 \tan \alpha - 2 = 3 \tan \alpha + 2 \rightarrow \tan \alpha = 5$$

$$\text{پس: } \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{10}{1 + 25} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۲

می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$\frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \sin(90^\circ - 40^\circ) \sin(90^\circ - 20^\circ)}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin(2 \times 20^\circ) \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{2 \sin 80^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin(2 \times 40^\circ)}{2 \sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\sin 80^\circ}{4 \sin 80^\circ} = \frac{1}{4}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳

می‌دانیم $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 - 2 \sin^2 a \cos^2 a$ است.

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{1 - 2(\frac{1}{4})^2}{(\frac{1}{4})^2} = \frac{1 - \frac{1}{8}}{\frac{1}{16}} = 27(1 - \frac{1}{8}) = 27 - 9 = 18 \end{aligned}$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۴

$$\cos^2 x = 1 + \sin^2 x \rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 1 \rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \rightarrow 1 = 2 \cos^2 x - 1 \rightarrow 2 \cos^2 x = 2 \rightarrow \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۵

$$\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sin x + 6 \cos x} = 1 \xrightarrow{\div \cos x} \frac{3 \tan x - 4}{\tan x + 6} = 1 \rightarrow 3 \tan x - 4 = \tan x + 6$$

$$\rightarrow 2 \tan x = 10 \rightarrow \tan x = 5$$

$$\tan^2 x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{10}{1 - 25} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12} \rightarrow \cot^2 x = -\frac{12}{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۶

می‌دانیم $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \times \frac{6}{16} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 x = \cos^2(2x) = 2 \cos^2 2x - 1 = 2 \times \frac{1}{16} - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷

می‌دانیم $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$ است.

$$1 + \sin 220^\circ = m \Rightarrow 1 + \sin(180^\circ + 40^\circ) = m \Rightarrow 1 - \sin 40^\circ = m \Rightarrow 1 - \sin(90^\circ - 50^\circ) = m$$

$$\Rightarrow 1 - \cos 50^\circ = m \Rightarrow 2 \sin^2(\frac{50^\circ}{2}) = m \Rightarrow \sin^2 25^\circ = \frac{m}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸

می‌دانیم $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

$$\sin 15^\circ \times \cos 75^\circ - \frac{1}{2} = \sin 15^\circ \times \cos(90^\circ - 15^\circ) - \frac{1}{2} = \sin 15^\circ \sin 15^\circ - \frac{1}{2}$$

$$= \sin^2 15^\circ - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 - 2 \sin^2 15^\circ) = -\frac{1}{2} \cos(2 \times 15^\circ) = -\frac{1}{2} \cos 30^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۹

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a, \sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos a$$

$$\sin(\pi + x) - \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow -\sin x - \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -2 \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{4}$$

از طرفی $\sin(\frac{\pi}{2} + 2x) = \cos 2x$ و با کمک فرمول $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم:

$$\cos 2x = 1 - 2(-\frac{1}{4})^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۰

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a, \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$$



$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3 \rightarrow \sin \theta + \cos \theta = 3 \sin \theta - 3 \cos \theta \rightarrow 4 \cos \theta = 2 \sin \theta \rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2$$

$$\rightarrow \tan \theta = 2$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1 + 4} = \frac{2}{5} = 0.4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۱

می‌دانیم $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ و $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2(2\alpha) = \frac{1}{4} \sin 4\alpha = \frac{1}{4} \sin(4 \times 75^\circ) = \frac{1}{4} \sin(300^\circ) = \frac{1}{4} \sin(360^\circ - 60^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} \sin(-60^\circ) = -\frac{1}{4} \sin 60^\circ = -\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۲ می‌دانیم که $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$ است.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$$

برای محاسبه $-\sin 2\alpha$ کافی است طرفین تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ را به توان ۲ برسانیم.

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۳

می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) = \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

$$= (\sin \theta \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta = \frac{1}{4} \times a^2 = \frac{a^2}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۴ می‌دانیم $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a$ و $\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}$ است.

$$\sin x + \cos x = \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 + \sin 2x = \frac{25}{16} \rightarrow \sin 2x = \frac{9}{16}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} \rightarrow \tan x + \cot x = \frac{2}{\frac{9}{16}} = \frac{32}{9}$$

$$\rightarrow \sqrt{\tan x + \cot x} = \frac{\sqrt{32}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۵ می‌دانیم: $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$, $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

$$\cos x - \sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2 \sin x} \rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\times 2} \sin 2x - 1 + \cos 2x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}_1 + \underbrace{2 \sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} = 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

$$\rightarrow 1 + \sin 4x = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۶ می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.



$$\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} = \sin \frac{\pi}{14} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14} \right) = \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{4\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14}$$

عبارت را در $\cos \frac{\pi}{14}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14} \cos \frac{4\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14} \cos \frac{4\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{14} \cos \frac{4\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \sin \frac{8\pi}{14}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14} \right)} = \frac{\frac{1}{8} \sin \left(\pi - \frac{8\pi}{14} \right)}{\sin \left(\frac{6\pi}{14} \right)} = \frac{\frac{1}{8} \sin \frac{6\pi}{14}}{\sin \frac{6\pi}{14}} = \frac{1}{8}$$

$$\cot a + \tan a = \frac{2}{\sin 2a}, \cot a - \tan a = 2 \cot 2a, a^r + b^r = (a+b)^r - 2ab$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۷

$$\begin{aligned} \tan^r \frac{\pi}{8} - \cot^r \frac{\pi}{8} &= (\tan^r \frac{\pi}{8} + \cot^r \frac{\pi}{8})(\tan^r \frac{\pi}{8} - \cot^r \frac{\pi}{8}) \\ &= ((\tan \frac{\pi}{8} + \cot \frac{\pi}{8})^r - \underbrace{2 \tan \frac{\pi}{8} \cot \frac{\pi}{8}}_1)(\tan \frac{\pi}{8} + \cot \frac{\pi}{8})(\tan \frac{\pi}{8} - \cot \frac{\pi}{8}) \\ &= ((\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}})^r - 2)(\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}})(-2 \cot \frac{\pi}{8}) \\ &= ((\frac{2}{\sqrt{2}})^r - 2)(\frac{2}{\sqrt{2}})(-2(1)) = (2^r - 2)(\frac{2}{\sqrt{2}})(-2) = \frac{-4 \cdot 2^r}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2^r \sqrt{2} \end{aligned}$$

که جواب حاصل -2^r برابر $\sqrt{2}$ است.

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a \text{ و } a^r + b^r = (a+b)^r - 2ab(a+b) \text{ می‌دانیم } 1 2 3 4 88$$

$$\begin{aligned} \sin^r \frac{\pi}{12} + \cos^r \frac{\pi}{12} &= (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12})^r - \underbrace{2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}}_{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{12}} (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}) = (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12})^r - \frac{2}{2} \sin \frac{\pi}{6} (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}) \\ &= (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12})^r - \frac{2}{2} (\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}) \star \end{aligned}$$

اکنون باید $\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم.

$$\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = A \xrightarrow[\text{توان } 2]{(\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a} 1 + \sin \frac{\pi}{6} = A^2$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{3}{2} \rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow (\frac{\sqrt{6}}{2})^r - \frac{2}{2} (\frac{\sqrt{6}}{2}) = \frac{6^{\frac{r}{2}}}{2} - \frac{2\sqrt{6}}{2} = \frac{6^{\frac{r}{2}}}{2} - \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۹

می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{8} \right) \left(1 + \cos \left(\pi - \frac{\pi}{8} \right) \right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{8} \right) \left(1 + \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{8} \right) \right)$$

$$A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{8} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{8} \right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{8} \right) \left(1 - \cos \frac{3\pi}{8} \right) = \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \right) \left(1 - \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right)$$

$$A = \sin^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \sin^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \sin^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \sin^2 \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{\pi}{8}$$



$$A = \left(\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2 \left(\frac{\pi}{8} \right) \right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

می‌دانیم $\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}$ و $(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin 2a$ است. (۹۰) ۱ ۲ ۳ ۴

توان $\frac{2}{3}$

$$\sin 2x - \cos 2x = \frac{2}{3} \rightarrow (\sin 2x - \cos 2x)^2 = \frac{4}{9} \rightarrow 1 - \sin 4x = \frac{4}{9} \rightarrow \sin 4x = \frac{5}{9}$$

$$A = \frac{\cos 2x}{\tan x + \cot x} = \frac{\cos 2x}{\frac{2}{\sin 2x}} = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4x \right) = \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{36}$$

می‌دانیم که $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ و $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$ است. (۹۱) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 2 \rightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = 2 \rightarrow \tan x = 2$$

توجه کنید چون $1 + \cos 2x \geq 0$ است و جواب کسر برابر ۲ شده است بنابراین $\sin 2x > 0$ است.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

می‌دانیم که $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \left(\frac{1}{5} \right) - 1 = -\frac{3}{5}$$

از طرفی: $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \sin 2x = \pm \frac{4}{5}$ $\xrightarrow{\sin 2x > 0}$ $\sin x = \frac{4}{5} = 0.8$

با توجه به نمودار تابع $\tan x$ باید $\tan a = 1$ و a در ربع اول باشد بنابراین $a = \frac{\pi}{4}$ است و $\tan b = \sqrt{3}$ و b در $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ است، پس $b = \frac{4\pi}{3}$ (۹۲) ۱ ۲ ۳ ۴

بنابراین $b - a = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$

می‌دانیم که $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ است. (۹۳) ۱ ۲ ۳ ۴

تابع $f \cdot g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f \cdot g)(x) = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = a \cos bx$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است. بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است. (۹۴) ۱ ۲ ۳ ۴

چون شکل فرمت خود سینوس

$$Max = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{است، } b > 0} b + a = \sqrt{3}$$

صندوق در تابع

$$\left| \frac{\pi}{2} \right| \rightarrow -\frac{3}{2} = a + b \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

$$\begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

(۹۵) ۱ ۲ ۳ ۴

$$y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3 : T_1 = \frac{2\pi}{|a^2 + 2|}$$

$$y_2 = -3 \cos 3ax - 2 : T_2 = \frac{2\pi}{|3a|}$$

$$\xrightarrow{T_1 = T_2} |a^2 + 2| = |3a| \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2 = 3a \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \\ a^2 + 2 = -3a \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a-2) = 0 \\ (a+1)(a+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1, 1, -2, 2$$



$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a + b \sin x$$

$$\left| \frac{-5\pi}{6} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = a + b \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \rightarrow 0 = a - b \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow 0 = a - b \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow 0 = a - b \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \quad (I)$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار Max تابع از رابطه $|a| + c$ به دست می‌آید و چون تابع داده شده فرمت سینوس را دارد $ab > 0$ است و چون $y(0) > 0$ است پس $a > 0$ است و در نتیجه $b > 0$ است.

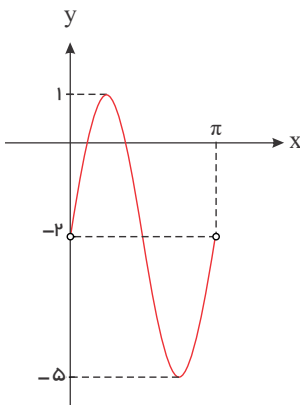
$$Max = |a| + c \rightarrow 3 = |b| + a \rightarrow 3 = b + a \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) مقادیر $a = 1$ و $b = 2$ حاصل می‌شوند.

$$\text{پس } f(x) = 1 + 2 \sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$f(x) = 3 \sin 2x - 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

برای رسم نمودار تابع f کافی است که در تابع $y = \sin x$ طول‌ها را نصف کرده و سپس عرض‌ها را سه برابر کرده و شکل را دو واحد پایین آوریم که شکل روبرو به دست می‌آید.



تابع $g(x) = k$ زمانی نمودار f را در دو نقطه قطع می‌کند که: $-2 < k < 1$ یا $-5 < k < -2$

دوره تناوب تابع $y = a \cos bx + c$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و کمترین مقدار آن $Min = -|a| + c$ است.

$$Min = -|a| + 2 = 0 \Rightarrow |a| = 2$$

باتوجه به نمودار، $\frac{5}{2}$ دوره تناوب این تابع برابر $\frac{1}{3}$ است: $\frac{8}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$ در نتیجه داریم:

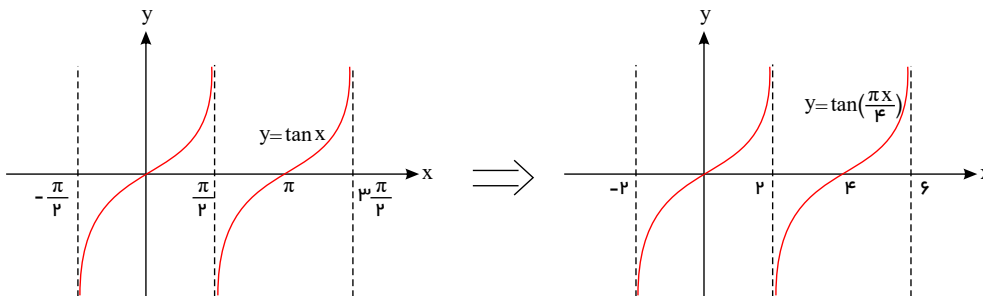
$$\frac{5}{2}T = \frac{10}{3} \Rightarrow T = \frac{2 \times 10}{5 \times 3} = \frac{4}{3}$$

از طرفی دوره تناوب این تابع برابر است با $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow |ab| = |a||b| = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

برای رسم $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ از روی نمودار

$y = \tan x$ باید در نمودار $y = \tan x$ ، طول نقاط را بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم کنیم. که داریم:



پس حداکثر مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازه $(2, a)$ اکیداً صعودی باشد، برابر ۶ است.

تابع از نقطه $(0, -2)$ می‌گذرد، پس داریم:



$$f(x) = a \cos bx$$

$$(0, -2) \Rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow a \cos 0 = -2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = -2 \cos bx$$

با توجه به این که دوره تناوب تابع 2π است و دوره تناوب تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است، داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

با توجه به این که $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، هر دو مقدار ± 1 را می‌تواند اختیار کند.

$$b = 1 \Rightarrow a + b = -2 + 1 = -1$$

$$b = -1 \Rightarrow a + b = -2 - 1 = -3$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۱

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ دوره تناوب}, \quad \text{Max} = |a| + c, \quad \text{Min} = -|a| + c$$

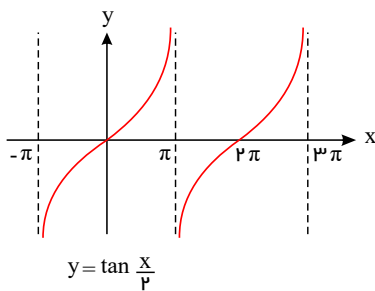
$$y = 3 \sin cx - 2 \Rightarrow \text{دوره تناوب } T = \frac{2\pi}{|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 2 \Rightarrow c = \pm 2$$

$$y = \pi \sin(-x) + c \Rightarrow \begin{cases} \text{Max} = \pi + c \\ \text{Min} = -\pi + c \end{cases} \Rightarrow \text{Max} + \text{Min} = 2c \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \Rightarrow \text{Max} + \text{Min} = 4 \\ c = -2 \Rightarrow \text{Max} + \text{Min} = -4 \end{cases}$$

می‌دانیم $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ و $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$ است، اکنون تابع را ساده می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۲

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}, \quad (\cos x \neq -1)$$

نمودار تابع f از انبساط افقی تابع $y = \tan x$ با ضریب ۲ به دست می‌آید:



دوره تناوب تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ برابر با $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ است. بنابراین نمودار تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ در بازه $(0, \pi)$ و $(\pi, 2\pi)$ صعودی است.

ابتدا ضابطه تابع داده شده را ساده می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۳

$$y = a + 2 \sin(\pi bx - \frac{\pi}{2}) \rightarrow y = a - 2 \sin(\frac{\pi}{2} - \pi bx) \rightarrow y = a - 2 \cos(\pi bx)$$

در تابع $y = a \cos bx + c$ دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $\text{Max} = |a| + c$ و $\text{Min} = -|a| + c$ است. دوره تناوب تابع داده شده برابر ۶ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \rightarrow \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

چون تابع داده شده کسینوس است هر دو مقدار b قابل قبول است.

$$\text{Max} = 3 \rightarrow |-2| + a = 3 \rightarrow a = 1$$

$$a - b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad a - b = 1 - (-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۴

می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ و $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ است و دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$f(x) = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2(2x) = -\frac{1}{4} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

ضابطه مورد نظر به صورت $y = a \cos bx + c$ است که $a < 0$ می‌باشد و توجه کنید در این تابع $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $\text{Max} = |a| + c$ و $\text{Min} = -|a| + c$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۵

$$T + \frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow \frac{3T}{2} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{4\pi}{3}$$



$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max} = 4 \Rightarrow |a| + c = 4 \\ \text{Min} = 0 \Rightarrow -|a| + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2$$

$$y = -2 \cos\left(\pm \frac{3}{2}x\right) + 2 = -2 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + 2$$

نمودار تابع در بازه $[0, 5]$ دو مرتبه تکرار شده است. یعنی دوره تناوب این تابع $\frac{5}{2}$ است. زیرا: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰۶)

$$2T = 5 \rightarrow T = \frac{5}{2} \quad (1)$$

با توجه به ضابطه $f(x)$ ، درباره دوره تناوب تابع $f(x) = \tan(cx)$ می‌دانیم که $T = \frac{\pi}{|c|}$ است. پس در این‌جا:

$$f(x) = a \tan(b\pi x) \rightarrow T = \frac{\pi}{|b\pi|} = \frac{1}{|b|} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{1}{|b|} = \frac{5}{2} \rightarrow b = \pm \frac{2}{5}$$

با مقایسه نمودار تابع داده شده و فرم اصلی $y = \tan x$ متوجه می‌شویم که نمودار تابع در یک منفی ضرب شده است. در نتیجه a و b مختلف‌العلامت هستند. لذا گزینه «۴» صحیح است.

می‌دانیم که $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ پس $y = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$ است. و می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ ، دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $\text{Max} = |a| + c$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰۷)

$$\text{Max} = \frac{3}{2} \rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm 1$$

چون فاصله دو مینیمم متوالی، دوره تناوب اصلی منحنی است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} - \left(-\frac{\pi}{|b|}\right) = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{|2\pi|} = \pi \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

چون شکل داده شده فرمت سینوس است پس a ، b هم‌علامتند، یعنی:

$$a = 1 \rightarrow b = 1 \rightarrow a + b = 2 \text{ یا } a = -1 \rightarrow b = -1 \rightarrow a + b = -2$$

می‌دانیم $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰۸)

$$\text{پس: } f(x) = -(\cot \pi x - \tan \pi x) = -2 \cot 2\pi x = \frac{-2}{\tan 2\pi x}$$

می‌دانیم دوره تناوب $y = \tan bx$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است بنابراین $T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

می‌دانیم $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰۹)

$$f(x) = -2 + a \cos(\pi + \pi bx) \rightarrow f(x) = -2 - a \cos(\pi bx)$$

$$\text{داریم: } -1 \leq \cos(\pi bx) \leq 1 \xrightarrow{a > 0} -a \leq a \cos(\pi bx) \leq a$$

$$\xrightarrow{\text{منفی ضرب می‌کنیم}} -a \leq -a \cos(\pi bx) \leq a \rightarrow -2 - a \leq -2 - a \cos(\pi bx) \leq -2 + a$$

بیشترین مقدار تابع از روی شکل برابر صفر است یعنی $-2 + a = 0$ است یعنی $a = 2$ می‌باشد پس $f(x) = -2 - 2 \cos(\pi bx)$ است.

با توجه به نمودار داده شده دوره تناوب تابع برابر $T = \frac{4}{3}$ است و می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \cos bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{4}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{3}{2} \rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

بنابراین $a \times b = \pm 3$ است.

دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin bx + c$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۱۰)

$$f(x) = 5 \sin \left(\frac{\pi}{2}x - c \right) = 5 \sin \left(\frac{3\pi}{2}x - 3c \right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\left| \frac{3\pi}{2} \right|} = \frac{4}{3}$$

فاصله طولی نقاط ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر $\frac{T}{2}$ است پس اگر از $x = \frac{1}{2}$ به اندازه $\frac{T}{2}$ به سمت راست یا چپ برویم به نقطه مینیمم می‌رسیم.



$$x_{Min} = x_{Max} + \frac{T}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

اولاً چون مقادیر تابع از نقطه‌ی $x = 0$ در حال افزایش است، بنابراین $b > 0$. از طرفی کم‌ترین مقدار تابع صفر است. در نتیجه:

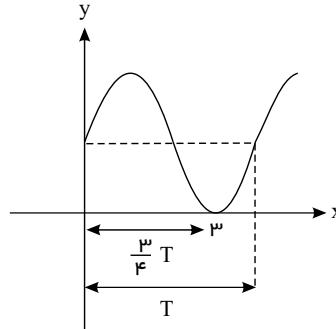
$$-1 \leq \sin b\pi x \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq a + \sin b\pi x \leq a + 1 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی با توجه به شکل $\frac{3}{4}T = 3$ و در نتیجه $T = 4$ است.

دوره‌ی تناوب $y = \sin bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b>0} b = \frac{1}{2}$$

پس $a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ است.
به شکل دقت کنید:



با توجه به شکل، دوره تناوب تابع برابر $T = 5$ است و می‌دانیم در توابع متناوب اگر از هر نقطه روی نمودار به اندازه دوره تناوب یا مضارب صحیح از آن جلو یا عقب برویم مقدار تابع تغییر نمی‌کند.

$$128,1 = 25(5) + 3,1 \rightarrow f(128,1) = f(3,1)$$

برای پیدا کردن $f(3,1)$ باید معادله خط مشخص شده در شکل در بازه $[3, 4]$ را بنویسیم:

$$\begin{cases} A \left| \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right. \\ B \left| \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \right. \end{cases} \rightarrow \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y - y_B}{x - x_B} \rightarrow \frac{y + 2}{x - 3} = \frac{-2 - 0}{3 - 4} = 2 \rightarrow y + 2 = 2x - 6 \rightarrow y = 2x - 8$$

$$\text{پس: } f(x) = 2x - 8 \rightarrow f(3,1) = 2(3,1) - 8 = -1,8$$

۱۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

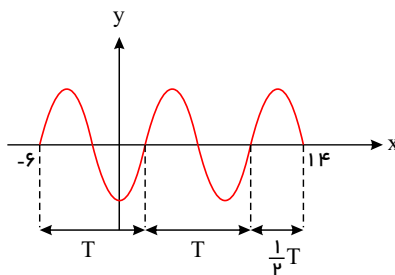
$$\text{نکته: } \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$f(x) = \underbrace{a \cos(\pi + bx)}_{-\cos bx} \Rightarrow f(x) = -a \cos bx$$

ابتدا ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

نمودار رسم شده، تابع را در $2,5$ دوره تناوب نشان می‌دهد، پس:

$$\Rightarrow \frac{5}{2}T = 14 - (-6) \Rightarrow \frac{5}{2}T = 20 \Rightarrow T = 8$$



$$\frac{2\pi}{|b|} = 8 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{4}$$

از طرفی دوره تناوب تابع از رابطه $\frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید، پس:

$$f(0) = -4 \Rightarrow \underbrace{-a \cos 0}_{-1} = -4 \Rightarrow a = 4$$

از طرفی مقدار تابع در $x = 0$ برابر -4 است، پس:

در نتیجه ضابطه f به صورت $f(x) = -4 \cos \frac{\pi x}{4}$ یا $f(x) = -4 \cos(-\frac{\pi x}{4})$ در می‌آید و داریم:

$$f(-\frac{32}{3}) = -4 \cos(\frac{\pi}{4} \times \frac{-32}{3}) = -4 \cos(\frac{-8\pi}{3}) = -4 \cos(\frac{8\pi}{3})$$

$$= -4 \cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = -4 \cos \frac{2\pi}{3} = -4 \times \frac{-1}{2} = 2$$

دقت کنید چون $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ، جواب سؤال برای $b = -\frac{\pi}{4}$ نیز همین است.



$$f(x) = a - \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a + \sin b\pi x$$

با توجه به نمودار، نقطه‌ی $(0, 1)$ روی نمودار قرار دارد:

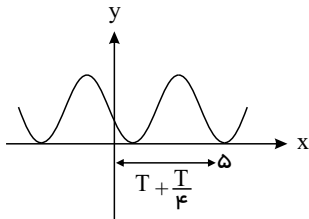
$$f(0) = 1 \Rightarrow a + \sin 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی مطابق شکل زیر، دوره‌ی تناوب تابع را می‌یابیم:

$$T + \frac{T}{4} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}T = 5 \Rightarrow T = 4$$

دوره تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ بدست می‌آید.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$



چون بلافاصله بعد از محور y ها نمودار در حال کاهش است، پس $b = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow a + b = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.5$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع از رابطه $|a| + c$ بدست می‌آید. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۵

$$|a| + c = 1 \rightarrow |a| - 1 = 1 \rightarrow |a| = 2 \rightarrow a = \pm 2$$

شکل داده شده فرمت خود سینوس را دارد بنابراین a و b هم علامتند ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که b و a هر دو مثبت هستند.

$$f(x) = 2 \sin(b\pi x) - 1 \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = 2 \sin \frac{5b\pi}{3} - 1 \rightarrow \sin \frac{5b\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

مقدار سینوس برابر $\frac{1}{2}$ شده است برای x های مثبت این اتفاق اولین بار در $\frac{\pi}{6}$ و بار دوم در $\frac{5\pi}{6}$ اتفاق می‌افتد و با توجه به شکل تابع، باید $\frac{5b\pi}{3}$ برابر $\frac{5\pi}{6}$ باشد.

$$\frac{5b\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \rightarrow \frac{b}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

به طریق مشابه برای حالتی که a و b هر دو منفی هستند، $b = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

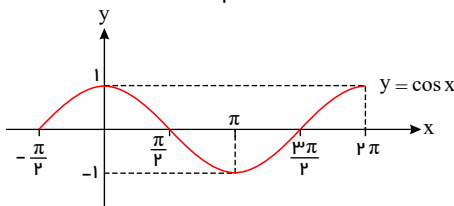
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۶

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(\frac{7\pi}{4} + x\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) - 2 \cos\left(\frac{7\pi}{4} + x\right)$$

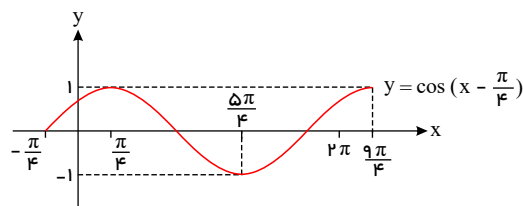
$$\rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - x\right) - 2 \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4} + x\right)$$

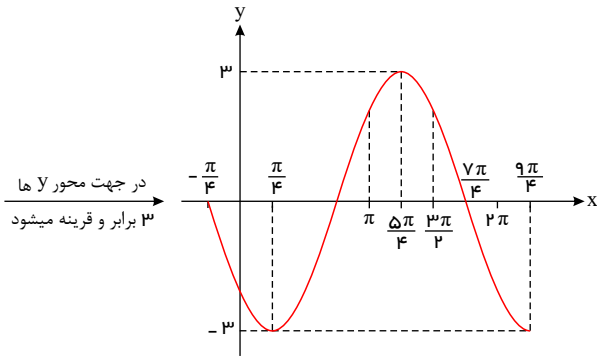
$$\rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -3 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



به سمت راست $\frac{\pi}{4}$





اگر خط $y = -1$ رسم کنیم در بازه گفته شده نمودار را در سه نقطه قطع می کند، پس گزینه «۴» نادرست است.

ابتدا تابع را ساده می کنیم. ۱۱۷

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos(b\pi x)$$

از آنجا که دوره تناوب $y = a \cos bx + c$ برابر است با $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و با توجه به این که نمودار ۴ تناوب خود را طی کرده است، داریم:

$$4T = 5.5 - (-2.5) = 8 \Rightarrow T = \frac{8}{4} = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

و از طرفی نقطه $(0, 2)$ روی نمودار قرار دارد، پس در ضابطه آن صدق می کند، یعنی:

$$2 = a \cos(0) \Rightarrow a = 2$$

که عدد ۲ در گزینه ها موجود است. $\Rightarrow a \times b = 2 \times (\pm 1) = \pm 2$

ابتدا ضابطه تابع را ساده تر کنیم: ۱۱۸

$$y = a \sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} - bx\right) + c\right) \Rightarrow y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\pi x\right) + c \Rightarrow y = a \cos b\pi x + c$$

فاصله افقی بین مینیمم و ماکزیمم متوالی برابر $\frac{T}{2}$ است. پس داریم:

$$\frac{T}{2} = 2 \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

هردوی $\pm \frac{1}{2}$ قابل قبول است، زیرا $\cos(-x) = \cos x$ مطابق شکل ماکسیمم تابع ۲ و مینیمم تابع -۶ است. پس:

$$\left. \begin{aligned} \text{Max} &= 2 \rightarrow |a| + c = 2 \\ \text{Min} &= -6 \rightarrow -|a| + c = -6 \end{aligned} \right\} \rightarrow c = -2, a = \pm 4$$

شکل داده شده، فرمت تابع $\cos x$ را دارد. پس فقط $a = 4$ صحیح است و داریم:

$$f(x) = 4 \cos \frac{\pi}{2} x - 2 \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{3}}{2}} f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 = 4 \cos \frac{\sqrt{3}\pi}{4} - 2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 2 = 4\left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) - 2 = -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = -2\sqrt{3} - 2$$

ابتدا π را در پرانتز ضرب می کنیم: ۱۱۹

$$f(x) = a \cos\left(\frac{3\pi}{2} + b\pi x\right) + c = a \sin(b\pi x) + c$$

با توجه به این که فاصله طولی نقطه ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است، پس:

$$T = 2 \times \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

و همچنین از نقاط $\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2}$ می توانیم برای پیدا کردن a و c استفاده کنیم.

حالت اول: $b = 1$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= 1 \Rightarrow a \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + c = 1 \Rightarrow -a + c = 1 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= -3 \Rightarrow a \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + c = -3 \Rightarrow a + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

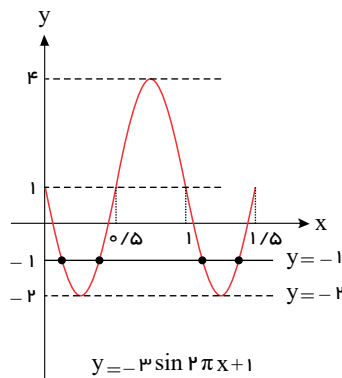
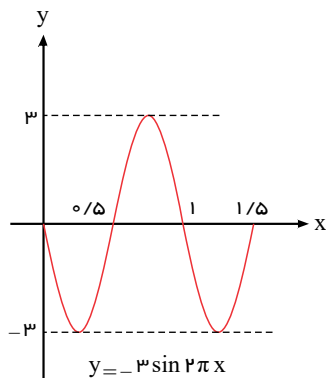
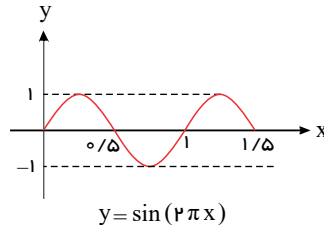
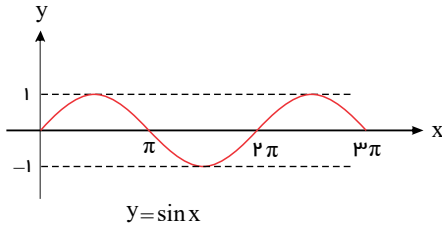
حالت دوم: $b = -1$



$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= -3 \Rightarrow -a + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

پس در هر دو حالت $abc = 2$ است.

۱۲۰ برای رسم تابع $y = -3 \sin(2\pi x) + 1$ ابتدا نمودار $y = \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می کنیم. سپس طول نقاط دامنه تابع $y = \sin x$ را بر 2π تقسیم کرده تا شکل $y = \sin(2\pi x)$ به دست آید. در مرحله بعد عرض نقاط منحنی را سه برابر کرده و نسبت به محور x ها قرینه می کنیم تا تابع $y = -3 \sin(2\pi x)$ به دست آید. در مرحله آخر منحنی را یک واحد به بالا می بریم تا تابع $y = -3 \sin(2\pi x) + 1$ حاصل شود. نمودار این تابع در چهار نقطه خط $y = -1$ را قطع می کند.



۱۲۱ ابتدا ضابطه تابع داده شده را ساده می کنیم.

$$y = a \sin\left(\frac{3\pi}{2} + b\pi x\right) \rightarrow y = -a \cos(b\pi x)$$

در تابع $y = a \cos bx + c$ دوره تناوب از رابطه $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به دست می آید و ماکسیم آن از رابطه $Max = |a| + c$ به دست می آید. در فاصله $[0, 3]$ شکل دوبار تکرار شده است، پس:

$$2T = 3 \rightarrow T = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{3}{2} \rightarrow |b| = \frac{4}{3} \rightarrow b = \frac{4}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$Max = 3 \rightarrow |-a| + 0 = 3 \rightarrow |a| = 3 \rightarrow a = 3, a = -3$$

چون شکل داده شده فرمت قرینه کسینوس را دارد باید ضریب کسینوس منفی باشد بنابراین $a = 3$ است.

$$a + b = \begin{cases} 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3} \\ 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار $a + b$ برابر $\frac{5}{3}$ است.

$$\sin^2 x = \sin x \rightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \text{حالت خاص} \\ \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین این معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۴ ریشه است.

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$x = k\pi + \alpha \rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

۱۲۴ کسری برابر صفر است که صورتش صفر باشد.



$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\begin{cases} x=2k\pi+\alpha \rightarrow 3x=2k\pi-2x \rightarrow 5x=2k\pi \rightarrow x=\frac{2k\pi}{5} \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \rightarrow 3x=2k\pi+\pi+2x \rightarrow x=2k\pi+\pi \end{cases}$$

غریبی (مخرج را صفر می‌کند)

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۵

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارت‌اند از: $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$

توجه کنید اگر $\sin^2 x = \sin^2 \alpha$ باشد آنگاه $x = k\pi \pm \alpha$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۶

$$\sin^2 x + \cos^2 3x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 3x \rightarrow \sin^2 3x = \sin^2 x$$

$$\rightarrow 3x = k\pi \pm x \rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{4} \end{cases}$$

این معادله پنج جواب $\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0, -\frac{\pi}{4}$ در بازه داده شده دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۷

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\sin x(1 + \sin x) = \cos^2 x \rightarrow \sin x + \sin^2 x = \cos^2 x \rightarrow \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\rightarrow \cos 2x = \sin x \rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب‌های $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ و $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ را نیز شامل می‌شود پس جواب کلی معادله به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ است.

$$\tan a + \cot a = \frac{1}{\sin a \cos a} \quad \text{می‌دانیم} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 128$$

$$\sin x(\tan x + \cot x) = 1 \rightarrow \sin x\left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 1 \rightarrow \frac{1}{\cos x} = 1 \rightarrow \cos x = 1$$

توجه کنید در نقاطی که $\cos x = 1$ است، $\sin x = 0$ است و مخرج را صفر می‌کند پس معادله جواب حقیقی ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۹

$$\tan 4x = \frac{1}{\tan(4x + \frac{\pi}{3})} = \cot(4x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - (4x + \frac{\pi}{3})\right)$$

$$\tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 4x \Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۰

$$\cos 3x = \cos 2x \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \rightarrow 3x=2k\pi+2x \rightarrow x=2k\pi \\ x=2k\pi-\alpha \rightarrow 3x=2k\pi-2x \rightarrow x=\frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

توجه کنید تمام جواب‌های $x = 2k\pi$ در $x = \frac{2k\pi}{5}$ قرار دارند پس جواب معادله به صورت $x = \frac{2k\pi}{5}$ است و جواب‌های معادله در بازه $(\pi, 3\pi)$ به صورت $\frac{12\pi}{5}, \frac{10\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}$ است.

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{6\pi}{5} + \frac{8\pi}{5} + \frac{10\pi}{5} + \frac{12\pi}{5} + \frac{14\pi}{5} = \frac{50\pi}{5} = 10\pi$$

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a \quad \text{می‌دانیم} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 131$$

$$4 \sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \rightarrow -4 \sin x \cos x = 1 \rightarrow -4\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 \rightarrow -2 \sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$



$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \xrightarrow{\text{به } k \text{ عدد می‌دهیم.}} x = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \xrightarrow{\text{مجموع جواب‌ها}} \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۲

$$\cos 2x + \cos x = 0 \rightarrow \cos 2x = -\cos x \rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x)$$

$$\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi - \pi + x \rightarrow x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

توجه کنید چون $\cos x \neq 0$ است پس جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ قابل قبول نمی‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۳

$$\sin^2 x + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \cos^2 2x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 2x = \cos^2 x$$

می‌دانیم اگر $\cos^2 x = \cos^2 \alpha$ باشد، آن‌گاه $x = k\pi \pm \alpha$ است.

$$2x = k\pi \pm x \rightarrow \begin{cases} 2x = k\pi + x \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \rightarrow 0, \frac{\pi}{2}, \pi \\ 2x = k\pi - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

در کل معادله ۵ جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۴

$$\frac{3}{2}\cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\cos x - (1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\frac{3}{2}\cos x - 1 + \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x + \frac{3}{2}\cos x - 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{-\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۵

می‌دانیم $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ و $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\sin x \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin x \cos x - \cos^2 x = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \sin 2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1 \Rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

می‌دانیم که $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۶

$$(\cos 2x)(\cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \cos^2 x \rightarrow (\cos 2x)(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2} - \cos^2 x$$

$$\xrightarrow{\times 2} -\cos 2x = 1 - 2 \cos^2 x \rightarrow \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \rightarrow \cos 2x = \cos 2x$$

$$\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین ۴ جواب به دست می‌آید.

می‌دانیم $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۷

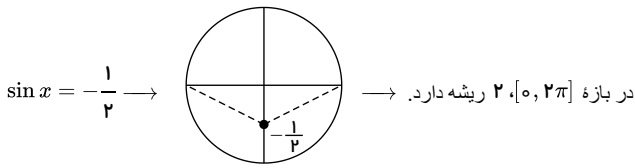
$$\frac{\cos 2x + 4 \sin x - 3}{\sin x - 1} = 3 \rightarrow \cos 2x + 4 \sin x - 3 = 3 \sin x - 3$$

$$\rightarrow \cos 2x + \sin x = 0 \rightarrow 1 - 2 \sin^2 x + \sin x = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

جمع ضرایب صفر است پس یک ریشه معادله $\sin x = 1$ و ریشه دیگر $\sin x = -\frac{1}{2}$ است.



غُوق (مخرج را صفر می‌کند). $\sin x = 1$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۸

می‌دانیم $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\cos 5x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos 5x = \cos 2x \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} 5x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 5x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} \xrightarrow{k=2} x = \frac{4\pi}{7} \end{cases}$$

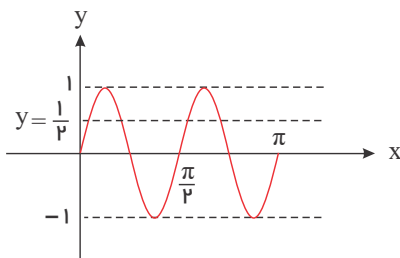
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۹

می‌دانیم $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ و $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \frac{1}{12} \Rightarrow \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2(2x) = \frac{1}{12} \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{3}$$

پس معادله به فرم $\sin 4x = \frac{1}{3}$ در می‌آید. نمودار $y = \sin 4x$ از انقباض افقی نمودار $y = \sin x$ به ضریب ۴ بدست می‌آید. در این صورت مطابق شکل زیر، نمودارهای $y = \sin 4x$ و $y = \frac{1}{3}$ در ۴ نقطه تلاقی دارند. پس معادله دارای ۴ ریشه است.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۰

$$\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - \cos^2 x \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - (1 - \sin^2 x) \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} = \frac{5}{8} - 1 + \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} - \sin^2 x = -\frac{3}{8} \Rightarrow -\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{3}{8} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

می‌دانیم اگر $\sin^2 x = \sin^2 \alpha$ باشد، آن گاه $x = k\pi \pm \alpha$ است.

$$x = k\pi \pm \alpha \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۴ جواب است.

می‌دانیم که $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۱

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$$

$$\xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + 2x \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - 2x \rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16} \end{cases}$$

می‌دانیم $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۲

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ \sin 2x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

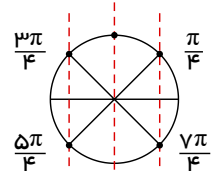
$$\text{مجموع جوابها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

$$2\cos^2 x = \cos x \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۳

$$\cos x = 0$$



$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

با توجه به شکل این معادله سه جواب کلی به صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{5\pi}{4}$ در نظر گرفت.

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a, \sin 2a = 2 \sin a \cos a, 1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a \quad \text{می دانیم: } ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۴$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin 2x \rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \sin 2x$$

$$\rightarrow \cos 2x = 1 - \sin 2x \rightarrow \sin 2x = 1 - \cos 2x \rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \sin^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0 \rightarrow 2 \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه‌ی داده شده دارای پنج جواب است.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{می دانیم } ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۵$$

$$\frac{\lambda \sin^2 x}{1 + \tan^2 x} + 3 \cos 2x = 0 \rightarrow \frac{\lambda \sin^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}} + 3 \cos 2x = 0 \rightarrow \lambda \sin^2 x \cos^2 x + 3 \cos 2x = 0$$

$$\rightarrow \lambda (\sin x \cos x)^2 + 3 \cos 2x = 0 \rightarrow \lambda \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 + 3 \cos 2x = 0$$

$$\rightarrow 2 \sin^2 2x + 3 \cos 2x = 0 \rightarrow 2(1 - \cos^2 2x) + 3 \cos 2x = 0$$

$$\rightarrow 2 \cos^2 2x - 3 \cos 2x - 2 = 0 \xrightarrow{\cos 2x = A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \frac{3+5}{4} = 2 \quad \text{غرض} \\ \cos 2x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع } k \text{ عدد می دهیم}} \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \rightarrow \frac{12\pi}{3} = 4\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۶

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad \text{می دانیم}$$

$$\tan 2x = 3 \tan x \rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x \rightarrow 2 \tan x = 3 \tan x (1 - \tan^2 x) \rightarrow 2 \tan x = 3 \tan x - 3 \tan^3 x \rightarrow 3 \tan^3 x - \tan x = 0$$

$$\rightarrow \tan x (3 \tan^2 x - 1) = 0 \rightarrow \tan x = 0 \text{ یا } 3 \tan^2 x - 1 = 0$$



$$\tan x = 0 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \rightarrow \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \rightarrow x = \pi, 2\pi \text{ جواب } 2$$

$$3 \tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \pi + \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

در کل معادله در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$ دارای ۷ جواب است.

می‌دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۷**

$$\cos 2x + \cos^2 x + 4 \sin x = 3 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x + 4 \sin x = 3$$

$$\rightarrow 3 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0 \xrightarrow{\sin x = A} 3A^2 - 4A + 1 = 0$$

$$a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} A=1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ A = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow \sin x = \frac{1}{3} \rightarrow \end{cases}$$

در بازه $[0, \pi]$ دو جواب مکمل دارد.

پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{3\pi}{2} + \pi$ است.

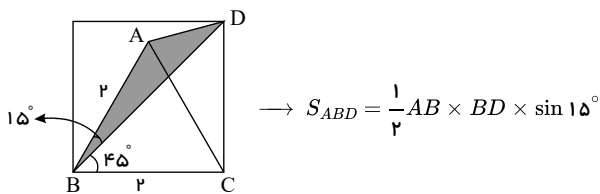
مساحت متوازی‌الاضلاع از نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین دو قطر به دست می‌آید. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۸**

قطرها را x و $2x$ در نظر می‌گیریم:

$$S = \frac{1}{2}(x)(2x) \sin 30^\circ \Rightarrow 32 = \frac{1}{2}(2x^2)\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 32 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس $AB = BC = 2$ می‌باشد. به علاوه BD قطر مربع و برابر با $2\sqrt{2}$ است. زاویه $\hat{ABD}$ برابر با 15° **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۹**

$15^\circ = 45^\circ - 60^\circ$ است. پس:



$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۰

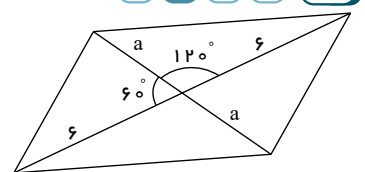
$$\begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2} \\ AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}, BC^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow BC = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10} \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

مساحت مثلث از نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بینشان به دست می‌آید. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۱**

$$\sin 12^\circ = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



قطرهای یک متوازی‌الاضلاع، آن را به چهار مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند. به کمک مساحت یکی از مثلث‌ها، مساحت متوازی‌الاضلاع را می‌یابیم:



$$S = 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times a \times \sin 120^\circ \right) = 18\sqrt{3} \Rightarrow S = 6a\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \Rightarrow a = 3$$

$$\text{قطر} = 2a = 6$$

مساحت هر مثلث برابر با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۲

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4 \sin \theta \Rightarrow 6 = 6\sqrt{2} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

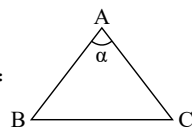
چون θ را 75° کاهش داده‌ایم، پس $\theta = 135^\circ$ قابل قبول است.

$$\theta' = 135^\circ - 75^\circ = 60^\circ, \quad a' = \sqrt{2}a = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6, \quad b' = \sqrt{2}b = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$$

$$S' = \frac{1}{2}a'b' \sin \theta' = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{2} \sin 60^\circ = 12\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{6} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{6\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۳

توجه کنید که همواره داریم:

نکته:  $\rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A'B' \cdot A'C' \cdot \sin 2\theta}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \theta} = \frac{a \times 3b \sin 2\theta}{\sqrt{6}a \times b \sin \theta} = \frac{3 \times 2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{6} \sin \theta} = \frac{6}{\sqrt{6}} \cos \theta$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

θ باید حاده باشد، زیرا در غیر این صورت 2θ نمی‌تواند زاویه یک مثلث باشد، پس داریم:

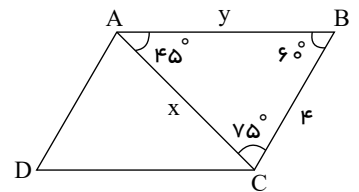
$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

زاویه $\hat{CAB} = 45^\circ$ است چرا که مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ABC برابر 180° می‌باشد. مساحت مثلث ABC را به کمک رابطه مساحت می‌نویسیم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۴

$$S = \frac{1}{2}xy \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times y \times \sin 60^\circ \rightarrow x \sin 45^\circ = 4 \sin 60^\circ$$

$$\rightarrow x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 4 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4 \frac{\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$$



برای آنکه گلوله قبل از برخورد به زمین به دیوار برخورد کند، باید فاصله افقی طی شده آن بزرگ‌تر از $5\sqrt{3}$ باشد، پس داریم:

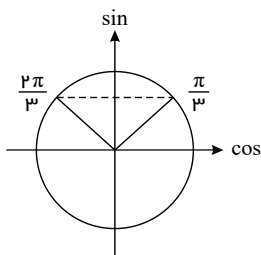
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۵

$$d > 5\sqrt{3} \Rightarrow \frac{v^2 \sin 2\alpha}{10} > 5\sqrt{3} \xrightarrow{v=10} \sin 2\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون α زاویه حاده است، پس 2α از 0 تا π می‌تواند باشد. سینوس زاویه‌های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ در این بازه برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. طبق دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

به ازای $\alpha = \frac{\pi}{6}$ و $\alpha = \frac{\pi}{3}$ گلوله پای دیوار فرود می‌آید و به ازای $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ گلوله بالاتر از سطح زمین به دیوار برخورد می‌کند.



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴

۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴

۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۱۷	۱	۲	۳	۴

۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۱۲۸	۱	۲	۳	۴
۱۲۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	۴
۱۴۲	۱	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	۳	۴
۱۴۵	۱	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	۴
۱۴۹	۱	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	۳	۴
۱۵۲	۱	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	۳	۴
۱۵۴	۱	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	۳	۴